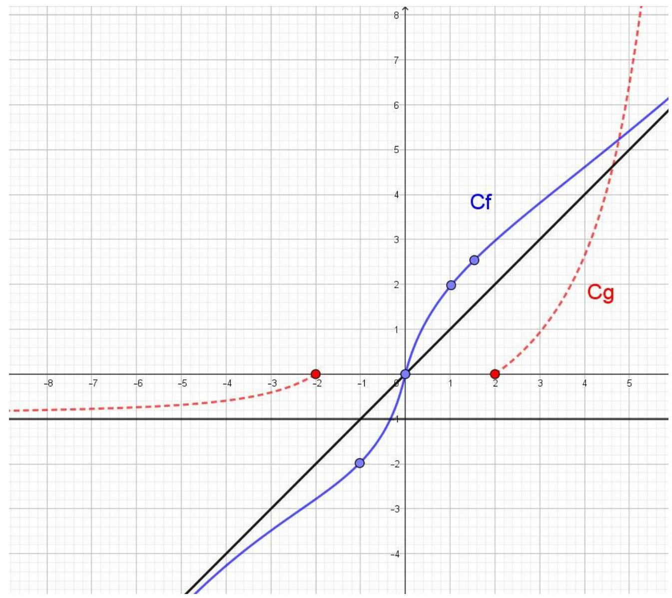
L.P. Kairouan	**Devoir de contrôle N°1**	**Prof : Chouihi**
Le : 09 / 11 /2018	**Durée : 2heures**	**Classe : $4M_1$**

Exercice N°1 **(7points)**



Dans la figure ci-contre C_f et C_g sont les courbes représentative dans un repère orthonormé de deux fonctions f et g telles que :

- La droite d'équation : y = x est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$
- La droite d'équation $y = -1$ est une asymptote horizontale à la courbe C_g au voisinage de $-\infty$.
- La courbe C_f passe par les points (-1,-2) ; (1,2) et $(\frac{3}{2},\frac{5}{2})$
- La courbe C_g passe par les points (-2,0) et (2,0)

1/ Déterminer les domaines de définition de fog et de gof .

2/ a) Déterminer gof(-1) , gof(1) et fog(2).

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-2x]$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} gof(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} gof(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{gof(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{fog(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x+\sqrt{x+1})}{x}$

3/ a) Montrer que gof est continue sur $[1, +\infty[$

b) Déterminer le sens de variation de gof sur $[1, +\infty[$

c) En déduire que pour tout entier naturel n, l'équation : gof(x) = n admet, dans $[1,+\infty[$ une unique solution U_n .

d) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

e) Montrer que la suite (U_n) n'est pas majorée et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Exercice N°2 **(7 points)**

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
On désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et i .

Soit l'application f qui à tout point M de P d'affixe non nulle z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-i}{\bar{z}}$

1/ Montrer que f n'admet aucun point invariant.

2/ Déterminer l'ensemble des antécédents par f du point A.

3/ Déterminer l'ensemble Γ des points M pour lesquels les points O, M et M' sont alignés.

4/ a) Montrer que pour tout point M de P \ {O}, les vecteurs $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont orthogonaux.

b) Montrer que pour tout point M de P \ {O, B}, $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}) \equiv (\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM}})\ [2\pi]$

c) En déduire une construction du point M' à partir d'un point M donné n'appartenant pas à (OB).

5/ a) Montrer que : $z(1-z'\overline{z'}) = i\,(1-z')$

b) En déduire que si M'appartenant au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon $\sqrt{2}$ alors M est l'image de M' par une rotation r que l'on caractérisera.

.

Exercice N°3 **(6 points)**

On considère la suite réelle définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + \dfrac{1+U_n}{1+2U_n}, n \in IN \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in IN$, $U_n \geq 1$.

b) Montrer que U est une suite croissante.

c) Montrer que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} U_n = +\infty$

2/ a) Montrer que pour tout $n \in IN$, $U_{n+1} \geq U_n + \frac{1}{2}$

b) En déduire que pour tout $n \in IN$, $U_n \geq 1 + \frac{n}{2}$. Retrouver $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} U_n = +\infty$

3/ On pose $V_n = U_{n+1} - U_n$

a) Montrer que V est une suite décroissante.

b) En déduire qu'elle est convergente.

c) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $V_n \leq \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n}$

d) En déduire $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} V_n$

e) Montrer que la suite définie par : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} V_k$ est divergente.