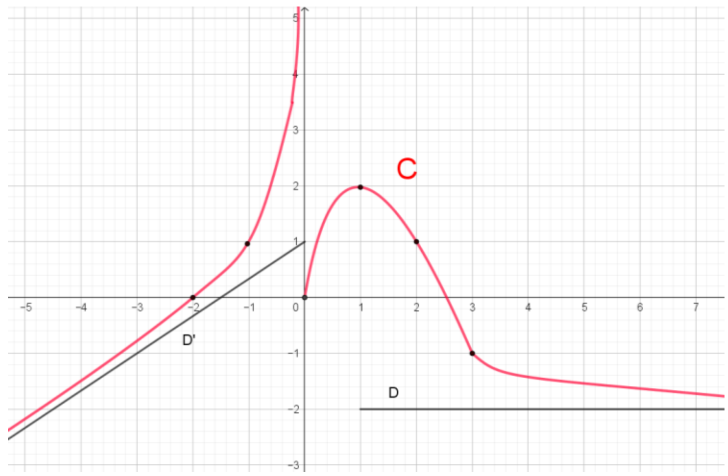
L.P. Kairouan	**Devoir de contrôle N°1**	**Prof : Chouihi**
Le : 08 / 11 /2019	**Durée : 2heures**	**Classe : $4M_2$**

Exercice N°1 **(6points)**

Dans la figure ci-contre C est la courbe représentative dans un repère orthonormé d'une fonction f telles que :

- La droite D': $y = \frac{2}{3}x+1$ est une asymptote oblique à la courbe C au voisinage de $-\infty$
- La droite D : $y = -2$ est une asymptote horizontale à la courbe C au voisinage de $+\infty$.
- L'axe des ordonnées est une asymptote verticale à la courbe C.
- La courbe C passe par les points (-2,0) ; (-1,1) et (0,0) ; (1,2) ; (2,1) et (3,-1)



1/ Sans justification, déterminer :

a) fof(-2) , fof(-1) , fof(0) , fof(1) , fof(2) et fof(3).

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} fof(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} fof(x)$; $\lim\limits_{x\to0^-} fof(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{fof(x)}{x}$

2/ Déterminer, en justifiant brièvement : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{fof(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to0^-} f[x\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)]$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+\frac{2}{3}x]$

3/ On désigne par h la restriction de fof sur $[3,+\infty[$.

a) Montrer que h est continue sur $[3,+\infty[$.

b) Montrer que h est strictement décroissante sur $[3,+\infty[$

c) En déduire que pour tout $n\in IN^*$, il existe un unique réel $\alpha_n\in[3,+\infty[$ tel que $h(\alpha_n)=\frac{1}{n}$

Exercice N°2 **(7 points)**

On considère la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{U_n+6}{U_n+2} \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}$

1/ Montrer que pour tout $n\in IN^*$, $U_n \geq 1$.

2/ a) Montrer que $U_{n+1}-2$ et U_n-2 sont de signes contraires.

b) En déduire que pour tout $p\in IN$, $U_{2p} \leq 2 \leq U_{2p+1}$

c) En déduire que si U est convergente alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2$

3/ a) Montrer que pour tout $n\in IN^*$, $|U_{n+1}-2| \leq \frac{1}{3}|U_n-2|$

b) En déduire que pour tout $n\in IN^*$, $|U_n-2| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

4/ Soit les suites définies sur IN* par : $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} U_{2k}$, $b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} U_{2k+1}$.

a) Montrer que pour tout $k\in IN$, on a : $2-\frac{3}{9^k} \leq U_{2k} \leq 2$ et $2 \leq U_{2k+1} \leq 2+\frac{1}{9^k}$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

Exercice N°3 (7 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A(-i) et B(i).
A tout point M(z) différent de A on associe le point M'(z') tel que : $z' = \frac{z-i}{-iz+1}$.

1/ On suppose que M ≠ A et M ≠ B.

a) Montrer que $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM'}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} + \left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right) [2\pi]$

b) En déduire l'ensemble Γ des points M(z) tels que z'∈IR.

2/ Soit M(z)∈P\{A, B}. On désigne par N le point d'affixe z + 2i.

a) Vérifier que ABNM est un parallélogramme.

b) Montrer que $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM'}}\right) \equiv -\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BN}}\right) [2\pi]$.

En déduire une construction de M' pour un point M de Γ \{B}.

3/ On considère l'équation dans C, (E) : $(z - i)^3 = (-iz + 1)^3$.

a) Montrer que si z est une solution de (E) alors z est réel.

b) Soit $\theta \in]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Montrer que : $\frac{\tan\theta - i}{-i\tan\theta+1} = e^{i(2\theta-\frac{\pi}{2})}$

En déduire les valeurs de θ pour les quelles tanθ est une solution de (E).

4/ Soit α un réel de]-π,π].

a) Résoudre dans C l'équation : $z^2 - 2iz + 2ie^{i\alpha} - e^{2i\alpha} = 0$.

b) On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives : $z_1 = e^{i\alpha}$ et $z_2 = 2i - e^{i\alpha}$.

Montrer que $(M_1M_2)^2 = 8(1 - \sin\alpha)$.

En déduire la valeur de α pour laquelle M_1M_2 est maximale.