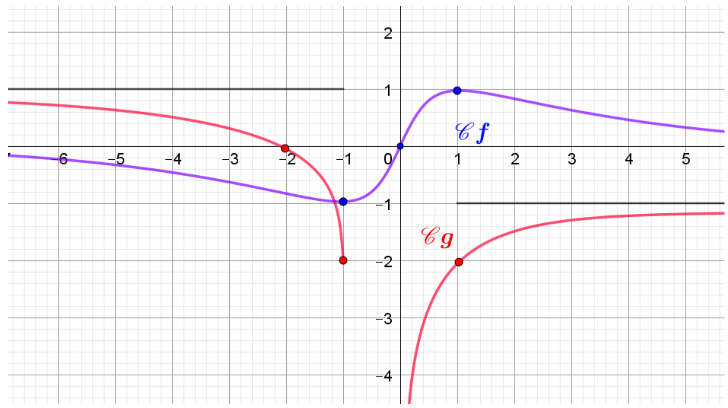
L.P.Ibn Khaldoun Kairouan	**Devoir de contrôle N°1**	**Prof : Chouihi**
Le : 12 / 11 /2021	**Durée : 2heures**	**Classe : 4M**

Exercice N°1 **(7points)**

Dans la figure ci-contre on a tracé les courbes représentatives de deux fonctions f et g dans un repère orthonormé telles que :

- f est définie sur IR et g est définie sur $]-\infty,-1]\cup]0,+\infty[$
- Les droites d'équations respectives : $y = -1$ et $y = 1$ sont des asymptotes à la courbe de g.
- L'axe des abscisses est une asymptote à la courbe de f au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.



1/ Par lecture graphique :

a) Déterminer, en justifiant, le domaine de définition de gof et celui de fog.

b) Déterminer gof(-1) ; gof(1) et fog(-2).

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} gof(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} fog(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} fog(x)$ (avec brève justification pour les quatre)

d) En justifiant : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-\cos(f(x))}{f(x)}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g\left(\frac{x^2-\sqrt{x+1}}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x(3+\cos x))$

2/ a) Montrer que gof est continue sur $]0,1]$

b) Montrer que gof est strictement croissante sur $]0,1]$

3/ Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que l'équation : $gof(x) = -2n$ admet, dans $]0,1]$ une solution unique a_n .

b) Déterminer la monotonie de la suite (a_n) .

c) En déduire que la suite (a_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice N°2 **(6 points)**

On considère la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 \in IR \\ U_{n+1} = U_n^2 - 5U_n + 9 \ ;\ n \in IN \end{cases}$

1) Montrer que la suite U est croissante.

2) Montrer que si la suite U est convergente alors elle a pour limite 3.

3) On suppose que $U_0 \in]2,3[$.

a) Montrer que pour tout $n\in IN$, on a : $2 < U_n < 3$.

b) En déduire que la suite U est convergente et préciser sa limite.

4) On suppose que $U_0 \notin [2,3]$.

a) Montrer que $U_1 > 3$.

b) Montrer que la suite U est divergente et que $\lim U = +\infty$.

5) Que peut on conclure pour la limite de la suite U dans le cas où $U_0 = 2$.

Exercice N°3 (7 points)

NB : Les parties A/ , B/ et C/ de cet exercice sont indépendantes !

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$,

A/ Soit a et b deux nombres complexes tel que : $a\bar{b} \neq 1$. On pose $Z = \frac{a-b}{1-a\bar{b}}$.

Montrer l'équivalence : $|Z| = 1 \Leftrightarrow |a| = 1$ ou $|b| = 1$

B/ Soit A, B et C trois points d'affixes respectifs a, b et c . Montrer l'équivalence :

Le triangle ABC est équilatéral $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$

C/ A tout point M(z) on associe le point M'(z') tel que : $z' = \frac{z(1+i\bar{z})}{1+z\bar{z}}$

1/ On suppose que $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

a/ Montrer que $z' = \cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}$

b/ Pour quelle valeur de θ les points O, M et M' sont ils alignés ?

c/ Existe-t-il une valeur de θ pour laquelle les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux ?

2/ On désigne par B le point d'affixe i.

Montrer que si M appartient au cercle trigonométrique alors M' appartient à la médiatrice du segment [BM]