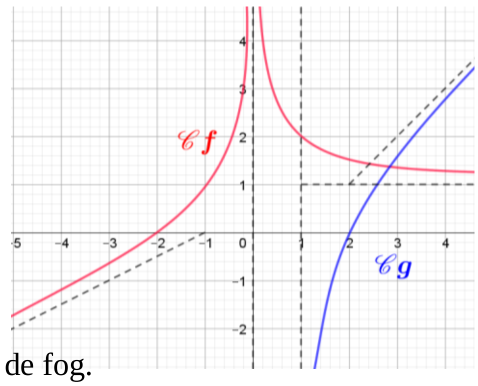
L.P.Ibn Khaldoun Kairouan **Devoir de contrôle N°1** **Prof : Chouihi**

Le : 19 / 11 /2022 **Durée : 3heures** **Classe : 4M**

Exercice N°1 (4points)



Dans la figure ci-contre on a tracé les courbes représentatives de deux fonctions f et g dans un repère orthonormé telles que :

- f est définie sur IR* et g est définie sur $]1,+\infty[$
- Les droites d'équations respectives : $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ et $y = 1$ sont des asymptotes à la courbe de f.
- Les droites d'équations respectives : $x = 1$ et $y = x - 1$ sont des asymptotes à la courbe de g.

1/ Par lecture graphique :

a) Déterminer, en justifiant, le domaine de définition de gof et celui de fog.

b) Déterminer, en justifiant, $\lim\limits_{x\to+\infty} fog(x)$; $\lim\limits_{x\to1^+} fog(x)$ et $\lim\limits_{x\to2} fog(x)$

c) Déterminer, en justifiant, $\lim\limits_{x\to+\infty} gof(x)$; $\lim\limits_{x\to-1^+} gof(x)$; $\lim\limits_{x\to0} gof(x)$

d) Déterminer, en justifiant, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-\cos(g(x))}{g(x)}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(\frac{x-\sqrt{x+1}}{x})$ et $\lim\limits_{x\to0}[gof(x) - f(x)]$

2/ a) Montrer que gof est continue sur $]0,+\infty[$

b) Montrer que gof est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

c) En déduire $gof(]0,+\infty[)$.

Exercice N°2 (6 points)

Soit la suite U définie par $U_0 \in IR$ et $U_{n+1} = 1 + U_n - \frac{2}{1-U_n}$, $n \in IN$

1/ On suppose que $U_0 > 1$.

a/ Montrer que pour tout $n \in IN$, $U_n > 1$.

b/ Montrer que pour tout $n \in IN$, $U_{n+1} - U_n \geq 1$.

c/ En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

On suppose dans la suite que $U_0 = \frac{-1}{2}$

2/ a/ Montrer que pour tout $n \in IN$, $-1 \leq U_n \leq 0$.

b/ Montrer que la suite U est décroissante.

c/ En déduire que la suite U est convergente et déterminer sa limite.

3/ a/ Montrer que pour tout $n \in IN$, $U_{n+1} + 1 \leq \frac{1}{2}(U_n + 1)$

b/ En déduire que pour tout $n \in IN$, $U_n + 1 \leq (\frac{1}{2})^{n+1}$. Retrouver alors la limite de la suite U.

4/ Soit $n \in IN^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1}(1 + U_k)$

a/ Montrer que la suite (S_n) est majorée par 1.

b/ En déduire que (S_n) est convergente.

5/ Soit la suite V définie par $V_0 = 1$ et $V_{n+1} = V_n + \sqrt{V_n^2 - U_n}$, $n \in IN$.

a/ Montrer que pour tout $n \in IN$, $V_{n+1} - V_n \geq -U_n$

b/ En déduire que pour tout $n \in IN^*$, $V_n \geq n + 1 - S_n$.

c/ Déterminer la limite de la suite V.

Exercice N°3 (4 points)

NB : Les questions de cet exercice sont indépendantes !

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1/ Soit a et b deux nombres complexes de module 2 et tel que $|a - b| = 3$. Calculer $|a + b|$.

2/ Soit a, b et c trois nombres complexes de module 1 et tel que $ab \neq -1$. On pose $z = \frac{(b-c)(1+ac)}{c(1+ab)}$

Montrer que z est imaginaire .

3/ Soit A, B et C trois points d'affixes respectives a, b et c.
Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$.

4/ Pour tout $n \in IN^*$ on pose $U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2+n+k}$ et $V_n = nU_n$

En utilisant les théorèmes d'encadrement, montrer que la suite U converge vers 0 et que la suite V converge vers 1.

Exercice N°4 (6 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

A tout réel $\theta \in]0,\pi[$ on considère l'équation (E_θ) : $\mathbf{z^2 - 2(e^{i\theta} + 1)z + 2e^{i\theta} - 2 = 0}$.

On désigne par z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E_θ) et par A et B leurs images dans le plan complexe.

On pose $Z = \frac{2z_1z_2}{z_1+z_2}$ et on désigne par N le point d'affixe Z.

A/ 1/ a/ Sans résoudre l'équation (E_θ), montrer que $Z = \frac{2(e^{i\theta}-1)}{(e^{i\theta}+1)}$ puis déduire la forme algébrique de Z.

b/ Déterminer l'ensemble Γ des points N lorsque θ décrit $]0,\pi[$.

2/ a/ Montrer que : $\frac{z_2-Z}{z_1-Z} = \frac{-z_2}{z_1}$

b/ En déduire que si O, A et B ne sont pas alignés alors N appartient au cercle circonscrit au triangle OAB.

B/ Pour la suite on prendra $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

On pose $\mathbf{Z_1 = e^{i\frac{\pi}{12}}z_1}$ et $\mathbf{Z_2 = e^{i\frac{\pi}{12}}z_2}$ et $Z' = Z.e^{i\frac{\pi}{12}}$

z_1 et z_2 sont les solutions de $(E_{\frac{2\pi}{3}})$: $\mathbf{z^2 - (1+i\sqrt{3})z - 3 + i\sqrt{3} = 0}$

On désigne par A' , B' et N' les points d'affixes respectives $\mathbf{Z_1}$, $\mathbf{Z_2}$ et Z' .

1/ a/ Soit K et K' les milieux respectifs des segments [AB] et [A'B']. Vérifier que $z_K = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_{K'} = e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

b/ En remarquant que $(Z_2 - Z_1)^2 = (Z_2 + Z_1)^2 - 4Z_1Z_2$, vérifier que : $(Z_2 - Z_1)^2 = 4[(z_{K'})^2 - (i\sqrt{2\sqrt{3}})^2]$

c/ Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{K'E}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{K'F}}\right) \equiv 0\ [2\pi]$ où E et F sont les points d'affixes respectives $i\sqrt{2\sqrt{3}}$ et $-i\sqrt{2\sqrt{3}}$.

En déduire que la droite (A'B') porte la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{EK'F}$.

2/ Dans la feuille à remttre on a placé les points N , E et K.

a/ Construire les points F et K'.

b/ Construire les droites (A'B') et (AB).

c/ En déduire une construction du centre Ω du cercle circonscrit au triangle OAB.

d/ Construire alors les points A et B tels que $\mathrm{Re}(z_1) > 0$.

Feuille à remettre Nom et Prenom :……………………………………………………………..