Exercice 1

5 pts

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $143\,u - 840\,v = 1$

1) a :Vérifier que le couple $(47;8)$ est une solution de (E) .

   b : Déduire les solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

   c : Déterminer les inverses de 143 modulo 840 .

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $n \wedge 899 = 1$.

   a :Montrer que $n \wedge 29 = 1$ et $n \wedge 31 = 1$.

   b : Déduire que : $n^{840} \equiv 1\ mod(899)$.

3) Déterminer un entier naturel n tels que $100 \leq n \leq 1000$ et $n^{143} \equiv 1\ mod(899)$.

Exercice 2

5 pts

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}\,;\, f(x) = -x + 2 + \int_0^{3x} f\left(\frac{1}{3}t\right) dt$

1)Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle

$$(E) : y' = 3y - 1.$$

2)a : Résoudre l'équation (E).

b :Déduire l'expression explicite de f .

3) Déterminer l'ensemble des fonctions g deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ tels que :

$$g(0) = 2\,,\quad g'(0) = 5 \quad \text{et} \quad g'' - 9g + 3 = 0\,.$$

Exercice3

10 pts

- Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{e^x}{1+e^{-x}}$

  $\mathcal{C}$ est la courbe de f selon un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ « unité graphique $2cm$ »

1) a : Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

   b : Dresser le tableau de variation de f .

   c : Tracer $\mathcal{C}$ en précisant la demi - tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

2) a :Calculer $A = \int_0^{ln2} f(x)dx$.

   b : En déduire l'aire en cm² de la partie fermée du plan limitée par $\mathcal{C}$,

   l'axe des ordonnés et la droite $y = \frac{4}{3}$.

❖ Soit $n \in IN$ et F_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $F_n(x) = \int_0^x \frac{e^t}{1+e^{-nt}}\,dt$

1) Justifier que $\forall t \in IR_+ : \frac{e^t}{1+e^{-nt}} \geq \frac{e^t}{2}$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x)$.

2) a : Montrer que F_n est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

   b : Déduire que l'équation $F_n(x) = 1$ admet une unique solution U_n dans $\mathbb{R}_+$.

   c : Calculer U_0.

3) a : Montrer que pour $n \in IN$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a : $F_n(x) \leq F_{n+1}(x)$.

   b : Déduire que la suite $(\, U_n \,)_{n \in IN}$ est décroissante puis justifier qu'elle est convergente .

4) a :Montrer que $\forall n \in IN$ on a : $e^{U_n} - 2 = \int_0^{U_n} \frac{e^{(1-n)t}}{1+e^{-nt}}\,dt$.

   b : Déduire que $\forall n \in IN^* : 0 \leq e^{U_n} - 2 \leq \frac{e^{U_n}}{n}$ puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

5) a :Soit $n \in IN^*$,En utilisant une intégration par parties montrer que :

   $n(e^{U_n} - 2) = \ln(2) - e^{U_n}.\ln(1 + e^{-nU_n}) + \int_0^{U_n} e^t \ln\left((1 + e^{-nt}\right)\,dt$.

   b :Justifier que $\forall t \in \mathbb{R}_+$ on a : $\ln(1+t) \leq t$.

   c :Déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} n(e^{U_n} - 2) = \ln(2)$.

   d :Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} n(U_n - \ln(2)) = \ln(\sqrt{2}\,)$.