## Exercice 1

**4 pts**

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $( E ) : 31x + 13y = 1$ .

1) a:Vérifier que le couple $(-5 , 12)$ est une solution de $( E )$.
   b : Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $( E )$ .
   c : Déduire le plus petit inverse positif de 13 modulo 31.
2) On donne dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $( E' ) : 31x - 13y = 2$.
   a : Justifier que l'équation $( E' )$ admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
   b : Montrer que si $(x, y)$ solution de $( E' )$ alors $y \equiv 7 (mod\ 31)$ .
   c : En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de $( E' )$.
3) le plan P muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .
   On donne $A(-23, -55)$ et $B(16 , 38)$
   Déterminer les points $M$ de coordonnées entières $(a, b)$ situés sur$[AB] - \{A, B\}$.

## Exercice 2

**5 pts**

Un jeu consiste à tirer simultanément 4 boules indiscernables au toucher d'un sac contenant une boule noire et 9 boules blanches, puis à lancer un dé bien équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.

Si la boule noire est tirée, il faut obtenir un nombre pair avec le dé pour gagner.

Si la boule noire n'est pas tirée, il faut obtenir un six avec le dé pour gagner.

On appelle $N$ l'évènement « la boule noire figure parmi les boules tirées »

et $G$ l'évènement « le joueur gagne»>.

1) a : Déterminer la probabilité de l'évènement $N$.

   b : Démontrer que la probabilité de l'évènement $G$ est égale à $\frac{3}{10}$ .

   On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

   c: Le joueur ne gagne pas. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré la boule noire ?

2) Pour jouer à ce jeu, une mise de départ de $m$ dinars est demandée,

   où $m$ est un réel strictement positif.

   - Si le joueur gagne, il reçoit 4 dinars.
   - S'il ne gagne pas mais qu'il a tiré la boule noire, le joueur récupère sa mise.
   - S'il ne gagne pas et qu'il n'a pas tiré la boule noire, le joueur perd sa mise.

On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.

a :Déterminer la loi de probabilité de $X$.

b : Exprimer l'espérance mathématique de $X$ en fonction de $m$.

c : Déterminer $m$ pour que le jeu soit équitable.

3 ) Soit $n$ un entier naturel non nul.

On joue $n$ fois à ce jeu sachant qu'après chaque partie les boules sont remises dans le sac. Déterminer la valeur minimale de $n$ pour laquelle la probabilité de gagner au moins une fois est supérieure à $0{,}999$.

4 ) Une entreprise est spécialisée dans la fabrication en série des dés cubiques pouvant présenter un défaut de dimension .On mesure l'écart Y en mm entre la longueur de l'arête et la longueur voulue .

On suppose que $Y$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 3$

- Si $Y < 0{,}5$ alors le dé est accepté.
- Si $0{,}5 \leq Y \leq 1$ alors le dé est refusé avec une probabilité égale à 0,001.
- Si $Y > 1$ alors le dé est refusé.

Soit l'évènement R « le dé est refusé »

1) Montrer que $p(R) \approx 0.05$

2) Sachant que le dé est accepté, Calculer à $10^{-2}$ prés la probabilité pour que $0{,}5 \leq Y \leq 1$

## Exercice3

**4 pts**

On considère les équations différentielles $(E)$ $y - 2y' = x$ et $(E')$ :$y - 2y' = 0$

1) a :Résoudre $(E')$.

   b :Déterminer une fonction affine $\varphi$ solution de $(E)$ .

   c : Montrer que $f$ est une solution de $(E)$ ssi $(f - \varphi)$ solution de $(E')$ .

   d : Déterminer l'ensemble des solutions de $(E)$ .

2) Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ solution de $(E)$ telle que $f(0) = 1$ .

   a :Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$ ,$f(x) = x + 2 - \sqrt{e^x}$ .

   b : Dresser le tableau de variation de $f$ .

3) Soit $h$ la restriction de $f$ sur $]-\infty\,, 2ln2]$.

   a: Vérifier que $h$ est une bijection de $]-\infty\,, 2ln2]$ sur lui-même .

   b : Déduire que l'équation $h(x) = 0$ possède une unique solution $\alpha \leq 2ln2$.

   c : On désigne par$h^{-1}$la fonction réciproque de $h$.

   Justifier que $h^{-1}$ est dérivable sur $]-\infty\,, 2ln2[$ et que :

$$\forall x \in ]-\infty\,, 2ln2[ \text{ on a : } \quad (h^{-1})'(x) = \frac{2}{x - h^{-1}(x)} .$$

   d : Calculer en fonction de $\alpha$ ; $I = \int_0^1 h^{-1}(x)dx$

## Exercice4

7 pts

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n > 1$.

On donne les fonctions $g_n$ définies sur $]n;+\infty[$ par : $g_n(x) = \ln\left(\frac{x}{x-n}\right) - \frac{n^2 - 2nx}{x\ (x-n)}$

et on désigne par $C_n$ les courbes représentatives des fonctions $g_n$ selon un repère orthonormé . Dans l'annexe ci-jointe ; On a tracé : $C_2$ , $C_3$ , $C_4$ *et* $C_8$

On admet que toutes les courbes $C_n$ sont situées au-dessous de l'axe des abscisses .

**I/** Soit $f$ la fonction définie sur $]2,+\infty[$ par : $f(x) = (x-2).\ln x - x.\ln(x-2)$

$\mathcal{C}$ sa courbe représentative selon un autre repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) a : Calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} f(x)$ . Interpréter graphiquement le résultat

   b : Montrer que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

   c : Calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et Interpréter graphiquement le résultat.

2) a : Montrer que $\forall x \in ]2,+\infty[ : f'(x) = g_2(x)$

   b : Dresser le tableau de variation de f

   c : Ecrire une équation de la tangente $T$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 4.

   d :Tracer T et $\mathcal{C}$

3) Soit $\lambda$ un réel supérieur strictement à 4

   a: Calculer $I(\lambda) = \int_4^{\lambda}(x-2)\,.\ln x\ \ dx$ et $J(\lambda) = \int_4^{\lambda} x\,.\ln\,(x-2)\ \ dx$

   b : En déduire l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan limitée par $\mathcal{C}$ ,l'axe $(O,\vec{\imath})$ et les droites d'équation $x = 4$ et $x = \lambda$.

   c : Calculer $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow +\infty} A(\lambda)$ .

**II/** Soit $f_n$ la fonction définie sur $]n;+\infty[$ par $f_n(x) = (x-n).\ln x - x.\ln(x-n)$.

1) a: Montrer que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x.\ln\left(\frac{x}{x-n}\right) = n$ .

   b : Déduire que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f_n(x) = -\infty$.

2) a : Calculer $f_n'(x)$ pour tout $x \in ]n;+\infty[$ .

   b : Justifier que $\forall x \in ]n,+\infty[\ \ f_n'(x) < 0$ .

   c : Dresser le tableau de variation de $f_n$ .

3) a : Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution $\alpha_n$ sur $]n;+\infty[$.

   b :La suite $(\alpha_n)_{n>1}$ est -elle convergente ?

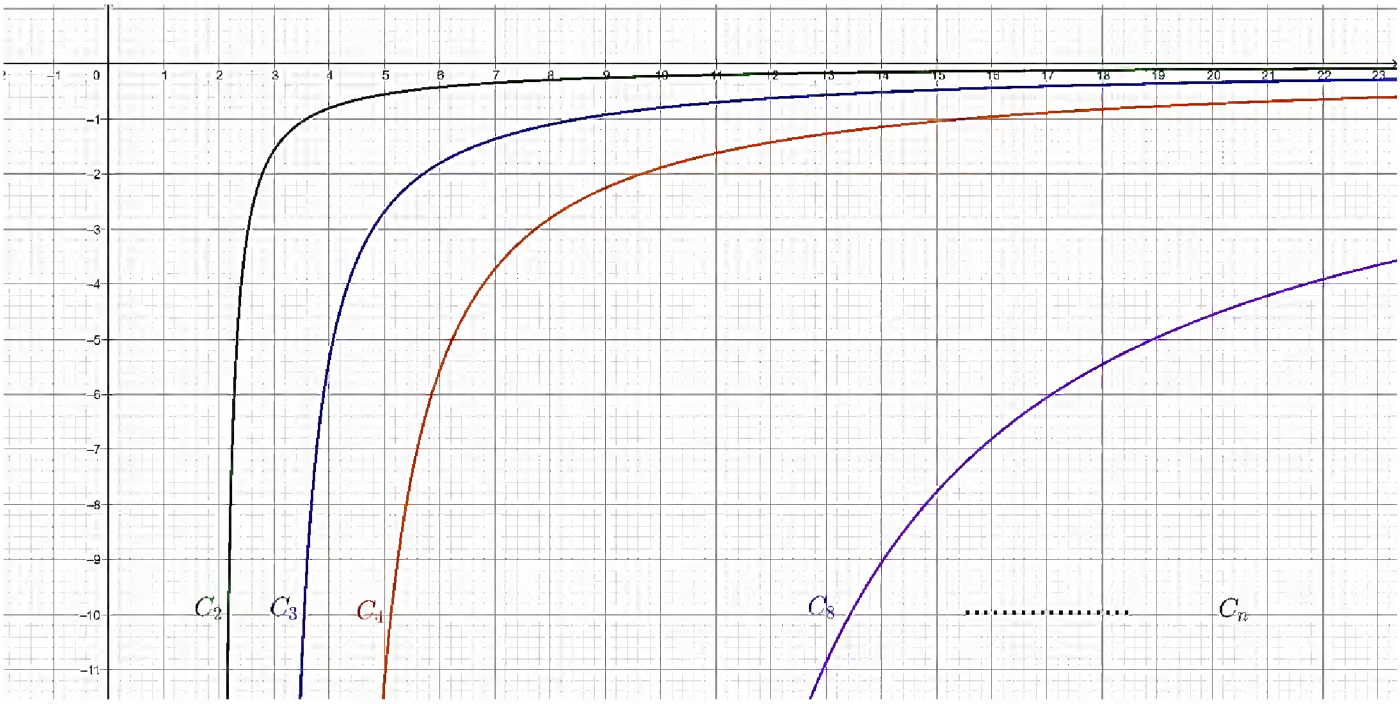
   c : Montrer que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\ln(\alpha_n - n)}{\alpha_n - n} = 0$ .

4) a : Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$ et $p \geq 5$ on a : $2^p > p^2$.

   b :Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 3$ : $n+1 \leq \alpha_n \leq n+2$.

   c : Calculer $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (\alpha_n - n)$ et en déduire $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n)$.

Annexe de l’exercice 4



# Corrigé du devoir de synthèse N°3 (BAC BLANC) (4°I7. 2022-2023).

## Exercice N°1 :

1) a/ $31\times(-5)+12\times 13=-155+156=1 \Rightarrow (-5,12)$ solution de $(E)$.

b/ $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}=\{(-5+13k\,;\,12-31k)\,;\,k\in\mathbb{Z}\}$.

c) On cherche $u\in\mathbb{Z}$ tq $13u\equiv 1\,[31]$

$\Rightarrow$ il existe $v\in\mathbb{Z}$ tq $13u=1+31v \Rightarrow 13u-31v=1 \Rightarrow 31(-v)+13u=1$

$\Rightarrow u=12-31k,\ k\in\mathbb{Z}$

12 est le plus petit inverse positif de 13 modulo 31.

2) $(E')$ : $31x-13y=2$.

a/ $31\wedge 13=1 \Rightarrow$ D'après Bezout il existe $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$ tq $31u-13v=2$.

$\Rightarrow$ l'éq$^{n}$ $(E')$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

b/ Si $(x,y)$ solution de $(E')$ alors $31x-13y=2 \Rightarrow -13y\equiv 2\,[31]$.

$$\left.\begin{array}{l} 13y\equiv -2\,[31] \Rightarrow 13\times 12\,y\equiv -24\,(31) \\ \text{or } 13\times 12\equiv 1\,(31) \Rightarrow 13\times 12\,y\equiv y\,(31)\end{array}\right) \Rightarrow y\equiv -24\,(31)$$

$\Rightarrow y\equiv 7\,(31)$.

c) Si $(x,y)$ solution de $(E') \Rightarrow y\equiv 7\,(31) \Rightarrow y=7+31q,\ q\in\mathbb{Z}$.

On remplace dans $(E') \Rightarrow x=13q+3$.

Vérification : $31(13q+3)-13(31q+7)=31\times 13q+31\times 3-13\times 31q-13\times 7$

$=2$

$$S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}=\{(13q+3\,;\,31q+7),\ q\in\mathbb{Z}\}$$

3) $\vec{AM}\begin{pmatrix}a+23\\ b+55\end{pmatrix}$ $\vec{AB}\begin{pmatrix}39\\ 93\end{pmatrix}$

$M\in(AB) \Leftrightarrow 93(a+23)-39(b+55)=0 \Leftrightarrow 93a-39b-6=0$

$\Leftrightarrow 31a-13b=2 \Leftrightarrow (a,b)$ solution de $(E')$

$\Leftrightarrow a=13q+3$ et $b=31q+7$ et $q\in\mathbb{Z}$.

$M\in[AB]\setminus\{A,B\} \Leftrightarrow -23<a<16$ et $-55<b<38$

$\Leftrightarrow -2<q<1$ et $-2<q<1$

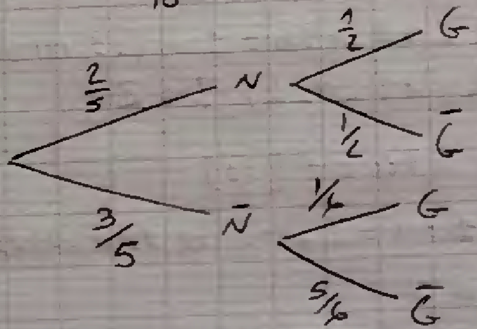
$\Leftrightarrow q\in\{-1,0\}$

Les pts $E(-10,-24)$, $F(3,7)$ sont les pts de coordonnées entières situés sur $[AB]\setminus\{A,B\}$.

## Exercice N°2 :

1) a) $p(N) = \dfrac{C_1^1 \times C_9^3}{C_{10}^4} = \dfrac{2}{5}$.

b)




$p(G) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{3}{10}$

c) $p(N/\overline{G}) = \dfrac{p(N \cap \overline{G})}{p(\overline{G})} = \dfrac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{2}}{7/10} = \dfrac{2}{7}$.

2) a) $X(\Omega) = \{4-m \; ; \; 0 \; ; \; -m\}$.

$p([X = 4-m]) = \dfrac{3}{10}$ ; $p([X=0]) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{10}$

$p([X=-m]) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{10}$.

| $x_i$ | $4-m$ | $0$ | $-m$ |
|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{5}{10}$ |

b) $E(X) = \dfrac{3(4-m)+0-5m}{10} = \dfrac{12-8m}{10}$

c) Le jeu est équitable $\Leftrightarrow E(X) = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{2}$

3) On note $Z = \mathcal{B}(n, \frac{3}{10})$. $p(Z \geq 1) = 1 - p(Z=0) = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n$

$p(Z \geq 1) \geq 0{,}999 \Leftrightarrow (0{,}7)^n \leq 0{,}001 \Leftrightarrow n \ln(0{,}7) \leq \ln(0{,}001)$

$\Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}7)} \Leftrightarrow n \geq 19{,}36$

La valeur minimale est 20.

4) a) $p(R) = p(Y \geq 1) + 0{,}001 \times p(0{,}5 \leq Y \leq 1)$

$= e^{-3} + (e^{-1{,}5} - e^{-3}) \times 0{,}001 = 0{,}04996$

$\simeq 0{,}5$

b) $p\left((0{,}5 \leq Y \leq 1) / \overline{R}\right) = \dfrac{p\left((0{,}5 \leq Y \leq 1) \cap \overline{R}\right)}{p(\overline{R})}$

$= \dfrac{(e^{-1{,}5} - e^{-3}) \times 0{,}999}{1 - 0{,}05} = 0{,}18$.

## Exercice N°3 :

1) a/ $(E')$ : $y - 2y' = 0 \iff y' = \frac{1}{2} y \iff y : x \mapsto k e^{\frac{1}{2}x} = k\sqrt{e^x}$, $k \in \mathbb{R}$.

Les solutions de l'équ° $(E')$ sont les f° définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto k\sqrt{e^x}$, $k \in \mathbb{R}$.

b/ Soit $\varphi : x \mapsto ax+b$ ($a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$).

$\varphi$ solution de $(E)$ ssi $\forall x \in \mathbb{R}$ : $\varphi(x) - 2\varphi'(x) = x$

" " : $ax + b - 2a = x$

" " : $a = 1$ et $b - 2a = 0$

donc $\varphi : x \mapsto x + 2$.

c/ $f$ solution de $(E) \iff f - 2f' = x$

$\iff f - 2f' = \varphi - 2\varphi'$

$\iff f - \varphi = 2(f - \varphi)'$

$\iff f - \varphi$ solution de $(E')$.

d) $f$ solution de $(E) \iff f - \varphi$ solution de $(E')$

Ainsi $f : x \mapsto k\sqrt{e^x} + x + 2$ et $k \in \mathbb{R}$.

2) a/ $f : x \mapsto k\sqrt{e^x} + x + 2$, $k \in \mathbb{R}$ et $f(0) = 1 \Rightarrow k = -1$

Ainsi $f(x) = x + 2 - \sqrt{e^x}$.

b/ $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ : $f'(x) = 1 - \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $2\ln 2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $2\ln 2$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

$\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{\sqrt{e^x}}{x}\right) x = -\infty$

3) a/ $h$ est continue et strict croissante sur $]-\infty, 2\ln 2]$ $\Rightarrow$ elle réalise une bijection de $]-\infty, 2\ln 2]$ sur $h(]-\infty, 2\ln 2]) = ]-\infty, 2\ln 2]$.

b/ $0 \in ]-\infty, 2\ln 2] \Rightarrow$ il existe un seul $\alpha \in ]-\infty, 2\ln 2]$ tq $h(\alpha) = 0$.

c/ $h$ est dérivable sur $]-\infty, 2\ln 2[$ et $\forall x \in ]-\infty, 2\ln 2[$ : $h'(x) \neq 0$

$\Rightarrow h^{-1}$ est dérivable sur $]-\infty, 2\ln 2[$

$\forall x \in ]-\infty, 2\ln 2[$ $(h^{-1})'(x) = \dfrac{1}{h'(h^{-1}(x))}$

On pose $h^{-1}(x) = y$ et $y \in ]-\infty, 2\ln 2[$.

$h^{-1}(x) = y \iff h(y) = x \iff y + 2 - \sqrt{e^y} = x$.

$\iff \sqrt{e^y} = y + 2 - x$.

$$(h^{-1})'(x) = \frac{1}{h'(y)} = \frac{2}{2 - e^{1/2 y}}$$

$$= \frac{2}{2 - \sqrt{e^y}} = \frac{2}{x - y} = \frac{2}{x - h^{-1}(x)}.$$

d)

$$I = \int_0^1 h^{-1}(x)\,dx.$$

$$\begin{cases} u(x) = h^{-1}(x) \longrightarrow u'(x) = (h^{-1})'(x) \\ v'(x) = 1 \longrightarrow v(x) = x. \end{cases}$$

$$I = \left[ x\, h^{-1}(x) \right]_0^1 - \int_0^1 x\,(h^{-1})'(x)\,dx.$$

$x\,(h^{-1})'(x) = ?$

On a $(h^{-1})'(x) = \dfrac{2}{x - h^{-1}(x)}$

$$\Rightarrow x\,(h^{-1})'(x) - h^{-1}(x).(h^{-1})'(x) = 2$$

$$\Rightarrow x\,(h^{-1})'(x) = 2 + h^{-1}(x).(h^{-1})'(x).$$

$$I = h^{-1}(1) - \int_0^1 2 + h^{-1}(x).(h^{-1})'(x)\,dx.$$

$$= 0 - \left[ 2x + \frac{1}{2} \left( h^{-1}(x) \right)^2 \right]_0^1$$

$$= -\left( 2 - \left( \frac{1}{2} \left( h^{-1}(0) \right)^2 \right) \right) = -2 + \frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{\alpha^2 - 4}{2}.$$

1ère Exercice N°4 :

I) 1) a) $\lim\limits_{2^+} f = \lim\limits_{x\to 2^+} (x-2)\ln x - x\ln(x-2) = +\infty \Rightarrow$ la droite d'équation $x=2$ est une asymptote à $(C)$

b) $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln x - \ln(x-2)\right) - 2\ln x$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x}{x-2}\right) - 2\ln x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x-2}\right) - 2\ln x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x-2}\,\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x-2}\right)}{\frac{2}{x-2}} - 2\ln x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{2}{1-2/x}}_{2}\,\underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x-2}\right)}{\frac{2}{x-2}}}_{1} - \underbrace{2\ln x}_{-\infty} = -\infty$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x-2} = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{2}{x-2}\right)}{\frac{2}{x-2}} = 1.$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\ln\left(1+\frac{2}{x-2}\right) - \frac{2\ln x}{x}\right] = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$

$(C)$ admet une B.I.P de direction celle de $(O\vec{i})$ au voisinage de $(+\infty)$

2) a) $\forall x\in\,]2,+\infty[$ : $f'(x) = \ln x + \frac{x-2}{x} - \ln(x-2) - \frac{x}{x-2}$

$$= \ln\left(\frac{x}{x-2}\right) + \left(\frac{(x-2)^2 - x^2}{x(x-2)}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{x}{x-2}\right) + \frac{4-4x}{x(x-2)}$$

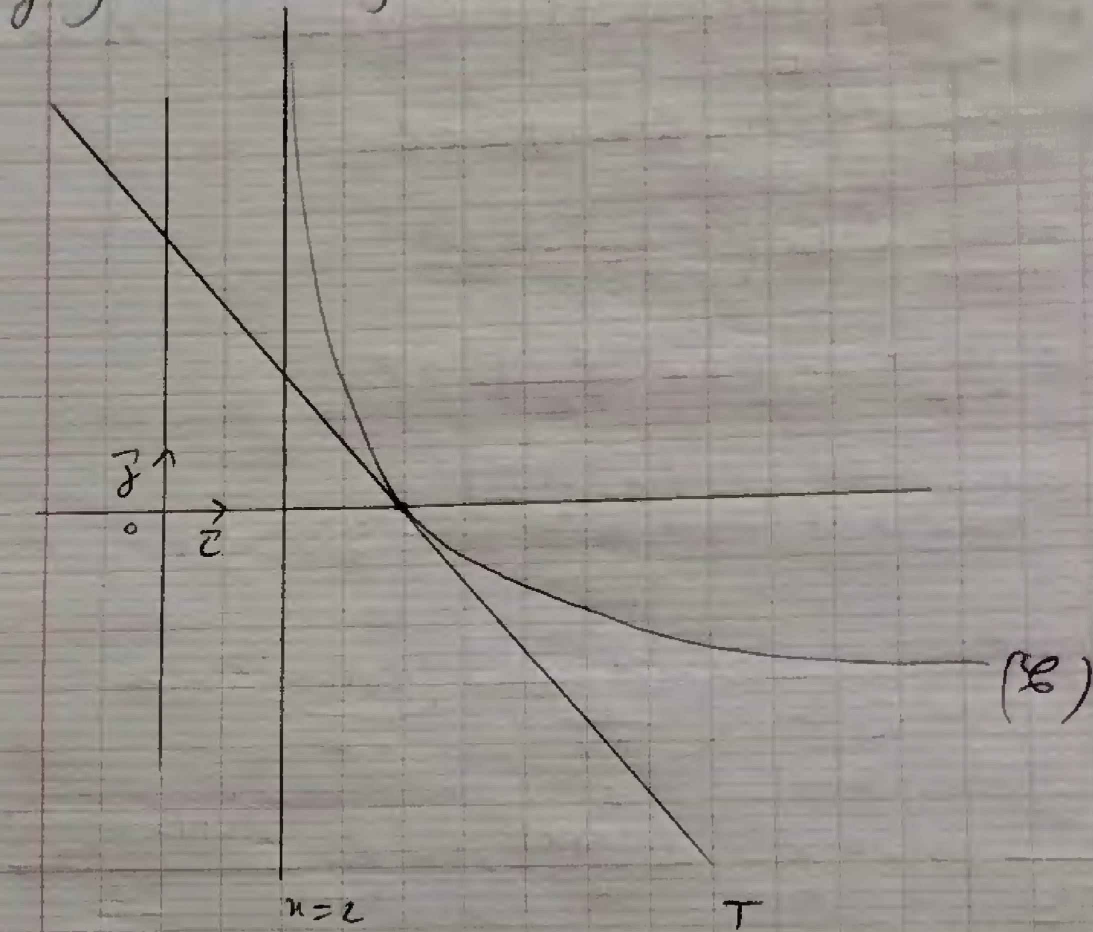
$$= \ln\left(\frac{x}{x-2}\right) - \frac{4(x-1)}{x(x-2)} = g_2(x)$$

b)

| $x$ | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

c) $T : y = f'(4)(x-4) + f(4) = \left(\ln 2 - \frac{3}{2}\right)(x-4).$

d)




3) a) $I(\lambda) = \int_4^{\lambda} (x-2)\ln x \, dx$

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \longrightarrow u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = (x-2) \longrightarrow v(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x \end{cases}$$

$$I(\lambda) = \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\ln x\right]_4^{\lambda} - \int_4^{\lambda}\left(\frac{1}{2}x - 2\right)dx.$$

$$= \left(\frac{1}{2}\lambda^2 - 2\lambda\right)\ln \lambda - \left[\frac{1}{4}x^2 - 2x\right]_4^{\lambda}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\lambda^2 - 2\lambda\right)\ln \lambda - \left(\frac{\lambda^2}{4} - 2\lambda + 4\right).$$

$$J(\lambda) = \int_4^\lambda x \ln(x-2)\, dx.$$

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x-2) \longrightarrow u'(x) = \dfrac{1}{x-2} \\ v'(x) = x \longrightarrow v(x) = \dfrac{1}{2} x^2 \end{cases}$$

$$J(\lambda) = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln(x-2)\right]_4^\lambda - \frac{1}{2}\int_4^\lambda \frac{x^2}{x-2}\, dx.$$

$$= \frac{1}{2}\lambda^2 \ln(\lambda-2) - 8\ln 2 - \frac{1}{2}\int_4^\lambda x+2+\frac{4}{x-2}\, dx.$$

$$= \frac{1}{2}\lambda^2 \ln(\lambda-2) - 8\ln 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4\ln(x-2)\right]_4^\lambda$$

$$= \frac{1}{2}\lambda^2 \ln(\lambda-2) - 8\ln 2 - \frac{1}{4}\lambda^2 - \lambda - 2\ln(\lambda-2) + 8 + 2\ln 2$$

$$= \frac{1}{2}\lambda^2 \ln(\lambda-2) - \frac{1}{4}\lambda^2 - \lambda - 2\ln(\lambda-2) + 8 - 6\ln 2.$$

b) $$A(\lambda) = \int_4^\lambda |f(x)|\, dx = \int_4^\lambda -f(x)\, dx.$$

$$= J(\lambda) - I(\lambda)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\lambda^2 - 2\right)\ln(\lambda-2) - \left(\frac{1}{2}\lambda^2 - 2\lambda\right)\ln\lambda + \lambda + 12 - 6\ln 2$$

$$= \frac{1}{2}\lambda^2 \ln\left(\frac{\lambda-2}{\lambda}\right) + 2\lambda\ln\lambda - 2\ln(\lambda-2) + \lambda + 12 - 6\ln 2$$

$$= \lambda\Big(\underbrace{\frac{1}{2}\lambda\ln\left(\frac{\lambda-2}{\lambda}\right)}_{-1\,?} + 2\underbrace{\ln\lambda}_{+\infty} - \underbrace{\frac{2\ln(\lambda-2)}{\lambda}}_{0} + 1\Big) + 12 - 6\ln 2$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{2}\lambda\ln\left(\frac{\lambda-2}{\lambda}\right) = \lim_{\lambda\to+\infty} -\frac{\ln\left(1-\frac{2}{\lambda}\right)}{-\frac{2}{\lambda}} = -1$$

I) 1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x}{x-n}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{n}{x-n}\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{nx}{x-n}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{n}{x-n}\right)}{\frac{n}{x-n}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{n}{1-\frac{n}{x}}\cdot\underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{n}{x-n}\right)}{\frac{n}{x-n}}}_{1} = n$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x}{x-n}\right) - n\ln x = -\infty.$

2) a) $\forall x\in\,]n,+\infty[\,:\ f'_n(x) = g_n(x).$

b) $\forall x\in\,]n,+\infty[\,:\ f'_n(x) = g_n(x) < 0.$

c)

| $x$ | $n$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'_n(x)$ | ‖ | $-$ |
| $f_n(x)$ | ‖ | $+\infty \searrow -\infty$ |

3) a) $f_n$ est une bijection de $]n,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
$0\in\mathbb{R} \Rightarrow$ il existe un seul $\alpha_n\in\,]n,+\infty[$ tq $f_n(\alpha_n)=0$.

b) $\forall n\geq 2:\ \alpha_n \geq n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n = +\infty$

Donc $(\alpha_n)$ est divergente.

c) $f_n(\alpha_n) = 0 \Rightarrow (\alpha_n-n)\ln(\alpha_n) - \alpha_n\ln(\alpha_n-n) = 0$

$$\Rightarrow \frac{\ln(\alpha_n-n)}{\alpha_n-n} = \frac{\ln(\alpha_n)}{\alpha_n}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(\alpha_n)}{\alpha_n} = 0$

Donc $\lim \frac{\ln(\alpha_n-n)}{\alpha_n-n} = 0.$

4) a) On montre par récurrence que $\forall p \geq 5 \quad 2^p > p^2$.

b) $f_n(n+1) = \ln(n+1) > 0$

$$f_n(n+2) = 2\ln(n+2) - (n+2)\ln 2$$

$$= \ln\left((n+2)^2\right) - \ln\left(2^{n+2}\right) \qquad (n \geq 3 \Rightarrow n+2 \geq 5)$$

$$2^{n+2} > (n+2)^2 \Rightarrow \ln\left(2^{n+2}\right) > \ln\left((n+2)^2\right) \Rightarrow f_n(n+2) < 0$$

Ainsi $\quad n+1 < \alpha_n \leq n+2.$

c) $f_n(\alpha_n) = 0 \Rightarrow \alpha_n - n = \dfrac{\alpha_n}{\ln(\alpha_n)} \cdot \ln(\alpha_n - n)$.

$$n+1 \leq \alpha_n \leq n+2 \Rightarrow \quad 1 \leq \alpha_n - n \leq 2$$

$$0 \leq \ln(\alpha_n - n) \leq \ln 2 \quad \text{et} \quad \frac{\alpha_n}{\ln(\alpha_n)} > 0$$

$$0 \leq \frac{\alpha_n}{\ln \alpha_n} \ln(\alpha_n - n) \leq \ln 2 \cdot \frac{\alpha_n}{\ln(\alpha_n)}$$

$$0 \leq \quad \alpha_n - n \leq \frac{\alpha_n}{\ln(\alpha_n)} \cdot \ln 2$$

$$\lim_{n \to +\infty} 0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{\alpha_n}{\ln(\alpha_n)} \cdot \ln 2 = 0$$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (\alpha_n - n) = 0$.

$$\lim_{n \to +\infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n) = \lim_{n \to +\infty} \left(\underbrace{\left(\alpha_{n+1} - (n+1)\right)}_{0} - \underbrace{(\alpha_n - n)}_{0} + 1\right) = 1.$$

Fin du corrigé !

S.