



DEVOIR SYNTHESE n°3

27/05/2021. (8h→12h)

4°M

SMAALI

Ex

L.

(8)

1

Montrer que :

(1)

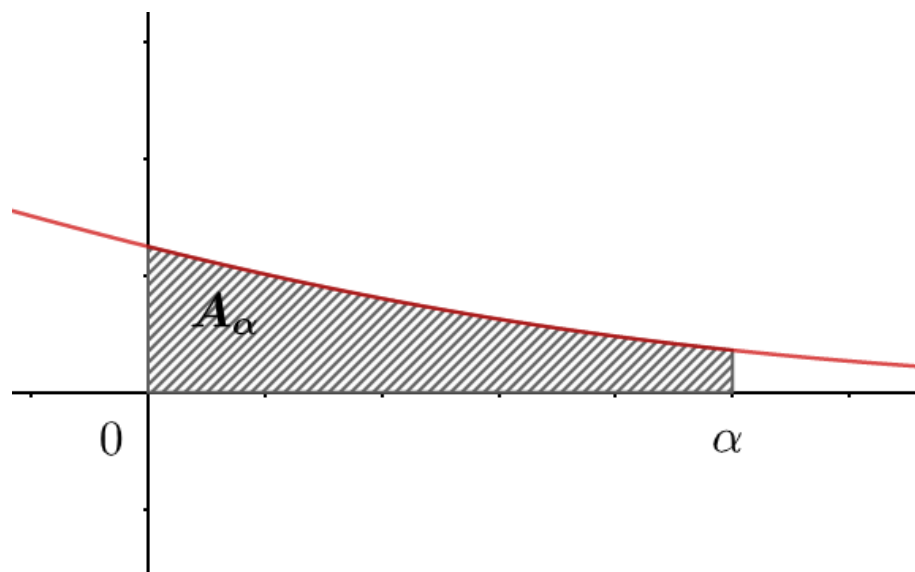
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)}{x^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right) = 1.$$

2

(1)

la figure suivante représente la courbe de la fonction f définie

$$\text{sur } \mathbb{R} \text{ par } f(x) = \left(\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \right)^2.$$



A_α désigne l'aire de la partie hachurée du plan limitée par la courbe de f ; l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\alpha$; ($\alpha>0$).

Montrer que : $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A_\alpha = \ln 2 - \frac{1}{2}$

3

(1)

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par ce tableau:

x_i	1	-1	2
$p(X=x_i)$	$\ln(a)$	$\ln(b)$	$\ln(c)$

Où a , b et c sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique strictement positive

Sachant que l'espérance de X est 2,

Montrer que : $p(X>0) = 2/3$.

4

(2,5)

1) Montrer que l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de

l'équation (E) : $x^2 - 4x + 3 \equiv 0 \pmod{13}$

est : $\{ 1 + 13k; k \in \mathbb{Z} \} \cup \{ 3 + 13k'; k' \in \mathbb{Z} \}$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé

$(0, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne la droite $\Delta : 3x + 4y - 5 = 0$

a. Pour x et y deux entiers relatifs.

Montrer que : si $M(x, y) \in \Delta$ alors $x \equiv 3 \pmod{4}$

Et Dédurre l'ensemble $\mathcal{L}$ des points M de Δ dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

b. Quel est l'ensemble $\mathcal{F}$ des points de $\mathcal{L}$ dont le carré de la distance à O est un multiple de 13 ?

5

(2,5)

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

Soit r l'application de $P \rightarrow P$ qui à tout point $M(x, y)$ associé le point $M'(x', y')$ tel que :
$$\begin{cases} x' = 1 - y \\ y' = x \end{cases}$$

1) Donner la transformation complexe de r , et déduire que r est une rotation dont on précisera le centre A et une mesure de son angle.

2) Soit $f = r \circ S_{(O, \vec{j})}$.

Montrer que f est une symétrie glissante que l'on caractérisera.

Ex**2.**

(4)

A/ On dispose d'un dé tétraédrique parfait et bien équilibré (à quatre faces marquées par les lettres : A ; G ; G ; G) et de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher :

- Dans U_1 , deux boules marquées : -1 ; 0.
- Dans U_2 , quatre boules marquées : -1 ; 0 ; 1 ; 2.

Une épreuve consiste à lancer le dé (on s'intéresse à la face cachée du dé) puis tirer successivement et sans remise deux boules, de U_1 si le dé donne A et de U_2 s'il donne G.

On définit ainsi, sur $\mathbb{N}^*$ une suite (t_n) de la façon suivante :

- La lettre donnée par le dé indique la nature de la suite (t_n) : si elle est A ; la suite (t_n) est Arithmétique et si elle est G ; la suite (t_n) est Géométrique.
- La 1^{ère} boule tirée désigne le premier terme t_1 de (t_n) .
- La 2^{ème} boule tirée désigne la raison de (t_n) .

On considère les évènements :

M « avoir une suite Géométrique »

N « avoir une suite Convergente »

1) Déterminer les probabilités : $p(M)$; $p(N \mid \bar{M})$ et $p(\bar{N} \mid M)$

Puis tracer l'arbre de probabilité correspondante et déduire $p(N)$.

2) Montrer que la probabilité qu'une suite Divergente soit Géométrique est égale à $\frac{2}{3}$.

B/ l'épreuve précédente est considérée comme étant un jeu :

- Si (t_n) est une suite Arithmétique, on perd 1 DT.
 - Si (t_n) est une suite Géométrique, on gagne $t_1 E(e^{t_1})$ DT.
- Où $E(a)$ désigne la partie entière du réel a .

1) Soit X la variable aléatoire donnant le gain algébrique.

a. Déterminer la loi de probabilité de X .

b. Quel est le gain moyen du jeu ?

2) HOSNI répète le jeu n fois de suite ($n \in \mathbb{N}^*$), de manière identique et en remettant à chaque fois les boules tirées dans leurs urnes.

a. Pour $n=3$; Quelle est la probabilité qu'il perdrait 2 fois "1DT" ?

b. Pour $n \geq 5$; Montrer que la probabilité qu'il perdrait exactement 5 fois de suite "1DT" est : $p_n = \left(\frac{n-4}{4^n}\right) \cdot 3^{n-5}$.

c. Donner $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

Soit la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{x}$; et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

1)

- a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 1, et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- b. Dresser le tableau de variation de f .
- c. Tracer (C_1) dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$. Unité : 4cm.

2)

Soit un réel $a > 1$.

Déterminer en fonction de a , l'aire $I(a)$ de la partie du plan délimitée par : la courbe (C) , l'axe $(0, \vec{i})$ et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=a$.

3)

Pour $n \geq 0$, On pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\sqrt{\ln\left(1+\frac{k}{2n}\right)}}{k+2n}$.

- a. Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$; on a :

$$\frac{1}{2n} f\left(1 + \frac{k}{2n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{2n}}^{1+\frac{k+1}{2n}} f(x) dx \leq \frac{1}{2n} f\left(1 + \frac{k+1}{2n}\right)$$

- b. En déduire que : $S_n - \frac{1}{2n} f\left(\frac{3}{2}\right) \leq I\left(\frac{3}{2}\right) \leq S_n$

- c. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

EX**4.**

(4)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{e^x - 1}}$, et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

1)

- a.** Dresser le tableau de variation de f .
- b.** Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion dont on précisera les coordonnées.
- c.** Tracer (C)
- d.** Vérifier que pour tout $x \in [0, 1]$ on a $f(x) \in [0, 1]$.

2)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n! 2^{n+1}} \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{e^x - 1}} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k! 2^k}$$

- a.** Calculer u_1 ; et déduire l'aire de la partie du plan limitée par (C) , l'axe $(0, \vec{i})$ et les droites d'équations $x=-1$ et $x=1$.
- b.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{(n+1)! 2^{n+1}}$
- c.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \sqrt{e} - u_n$
- d.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2 (n-1)! 2^{n+1}}$
- e.** Déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$