DEVOIR CONTROLE n°3.

09/04/2021

4°M.

SMAALI.

Ex 1. **6**

Les questions suivantes sont indépendantes :

1) Déterminer : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

2) Montrer que : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,.\, \mathrm{Ln}(1+\cos x)\quad dx = \frac{\pi}{2} - 1$.

3) Etudier la parité de la fonction définie par :

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{dt}{e^t+e^{-t}} .$$

4) Soient a et b deux entiers naturels non nuls premiers entre eux.
Montrer que : **a+b** et **ab** sont premiers entre eux.

5) Soit n un entier naturel.
Déterminer le reste modulo 9 de l'entier $2011^{3n+2} + 2020^{3n+1}$

6) Quel est le chiffre des unités de l'entier $2022^{2021^{2020}}$.

Ex 2. **5**

Pour tout entier n, on donne : a = 3n + 2 et b = 4n + 1.

1) Montrer que : a ^ b = 5 si et seulement si n ≡ 1(mod 5)

2) On considère dans Z × Z l'équation (E) : 5x − 16y = 12.

a. Vérifier que (-4, -2) est une solution de (E).

b. Montrer que : (x, y) solution de (E) ⇔ 5(x+4) = 16(y+2)

c. Déduire les solutions de (E)

3) N étant un entier naturel. Montrer que :

$$\begin{cases} N \equiv 13 (\mathrm{mod}\ 16) \\ N \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 5) \end{cases} \quad \text{si et seulement si} \quad N \equiv 61 (\mathrm{mod}\ 80)$$

4) **a.** Résoudre dans Z la congruence : 5u ≡1(mod 16).

b. Déterminer l'ensemble des entiers n tels que :

$$\begin{cases} a \wedge b = 5 \\ b^2 \equiv a (\mathrm{mod}\ 16) \end{cases}$$

Ex 3. **9**

A. Soit f la fonction définie sur [0, +∞ [par :

$$f(x) = \begin{cases} x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et (C) sa courbe de f dans un repère orthonormée(O, i , j).

1) Montrer que f est continue sur [0, +∞ [

2) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat.

3) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et interpréter le résultat.

4) a. Vérifier que, pour tout x>0 on a : $f''(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$

ou f'' désigne la dérivée seconde de f.

b. Dresser le tableau de variation de f' et déduire le signe de f'(x) sur]0 ;+∞[.

5) a. Dresser le tableau de variation de f.

b. Construire la courbe (C).

B. Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction f_n

définies sur [0, +∞ [par : $f_n(x) = \begin{cases} x^n . \ln(1+\frac{1}{x}) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Et soit $A_n = \int_0^1 f_n(t)\, dt$.

1) Montrer que la suite (A_n) est bien définie.

2) Montrer que pour tout x ∊ [0, 1] et pour tout n ≥ 2, on a :

$0 \leq x^{n-1} f(x) \leq x^{n-1}$.

3) Justifier que : $0 \leq A_n \leq \frac{1}{n}$. Déduire la limite de la suite (An).

C. On pose $X_n(t) = \int_t^1 x^n . \ln x \ dx$; $l_n = \lim\limits_{t \to 0^+} X_n(t)$

$$\text{et } Y_n(t) = \int_0^1 x^n . \ln(x+1) \ dx$$

1) A l'aide d'une intégration par parties exprimer $X_n(t)$ en fonction de t et de n.

2) Montrer que : $l_n = \frac{-1}{(n+1)^2}$

3) Montrer que : $Y_{n+1} = \frac{2\ln 2}{n+2} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{n+1}{n+2} Y_n$