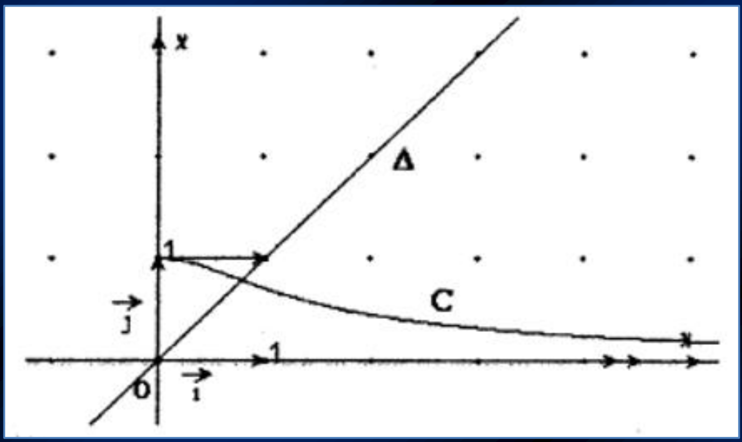
Devoir de Synthèse n°1

10-12-2021. (3h)

SMAALI.

Exercice n°1. (3,5pts)

Dans le graphique suivant la courbe (C) est celle d'une fonction f définie sur $[0, +\infty[$ et Δ la droite d'équation y=x.



1) a. Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera graphiquement.

b. Tracer sur l'annexe1, la courbe (Γ) de la fonction f^{-1}.

c. Par lecture graphique ; déterminer $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f^{-1}(x)}{x-1}$

2) La courbe (C) coupe Δ en un point d'abscisse $\alpha \in]\frac{\sqrt{3}}{2}, 1[$

a. En appliquant le TAF, Montrer qu'il existe $c \in]0, \alpha[$ tel que $f(\alpha) = 1 + \alpha . f'(c)$

b. Vérifier que : $1 - \frac{2}{\sqrt{3}} < f'(c) < 0$

3) Sur le graphique on a donné aussi la courbe (C') de f '.

a. Lire $f(\sqrt{3})$ et $f'(\sqrt{3})$ puis Déterminer $f^{-1}(\frac{1}{2})$ et $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$

b. Sachant que pour tout x≥0, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

Exercice n°2. (3,5pts)

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé, On considère les points A (1+i) et B (3-i).

Soit l'application σ : P→P, M(z) →M'(z') avec : $z' = \frac{1}{2}(z + i\bar{z})$.

1) a. Montrer que (OA) $\perp$ (AB).

b. Déterminer σ(A) et σ(B).

2) a. Montrer que tous point de la droite (OA) est invariant par σ.

b. Soit $M \notin (OA)$, Montrer que $(MM') //\ (AB)$.

3) a. Montrer que σ (σ(M)) = σ (M).

b. Déduire une construction du point M'.

c. Reconnaitre alors, l'application σ.

Exercice n°3. (6pts)

Soit f la fonction définie sur$]0,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{3}(\frac{1}{x}+2)$

On considère la suite (Un) définie par : $\begin{cases} u_0=\frac{1}{2} \\ u_{n+1}=f(u_n)\,;n\in IN \end{cases}$

1)

a. Etudier la monotonie de f sur$]0,+\infty[$.

b. Montrer par récurrence que, pour tout $n\in IN$ on a : $\frac{1}{2}\leq u_n\leq 2$.

2) Pour tout $x\in]0,+\infty[$, on pose $g(x)=fof(x)$.

a. Vérifier que pour tout $x\in]0,+\infty[$ on a : $g(x)=\frac{7x+2}{6x+3}$

b. Montrer que pour tout $x\in[\frac{1}{2},2]$ on a : $\frac{1}{25}\leq g'(x)\leq\frac{1}{4}$.

c. En appliquant le TIAF, Déduire que pour tout $x,y\in[\frac{1}{2},2]$

On a : $|g(x)-g(y)|\leq\frac{1}{4}|x-y|$.

3) Pour tout $n\in IN$ on pose : $V_n=U_{2n}$ et $W_n=U_{2n+1}$.

a. Vérifier que $V_{n+1}=g(V_n)$ et $W_{n+1}=g(W_n)$.

b. Montrer que pour tout $n\in IN$ on a : $|W_{n+1}-V_{n+1}|\leq\frac{1}{4}|W_n-V_n|$.

c. En déduire que pour tout $n\in IN$, On a : $|W_n-V_n|\leq\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

d. Déterminer alors, $\lim\limits_{n\to+\infty}(W_n-V_n)$.

4)

a. Montrer que pour tout $n\in IN$ on a : $V_n\leq 1$ et $W_n\geq 1$

b. Préciser les signes de g(x)-x sur $[\frac{1}{2},2]$

c. Prouver alors que les suites (Wn) et (Vn) sont adjacentes.

d. Déduire que (U_n) est convergente, et que $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=1$.

5) Soit les suites S et S' définie sur IN* par :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}V_k \qquad \text{et} \qquad S'_n=\sum_{k=1}^{n}W_n$$

a. Montrer que : $\frac{n}{2}\leq S_n\leq n\leq S'_n\leq 2n$.

b. Déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}S'_n=+\infty$.

et que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S'_n}{n^2}=0$.

Exercice n°4. (7pts)

ABC étant un triangle rectangle en A tel que $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

et AB=2a ($a \in IR^*_+$). O=B*C, I=A*C, K=A*B, J=O*B et S=O*C.

(voir annexe2 et le compléter au fur et à mesure)

1)

a. Montrer qu'il existe un unique déplacement R tel que R(A)=C et R(B)=O.

b. Montrer que R est une rotation, Puis construire son centre D.

c. Montrer que : ABDO est un losange.

d. Montrer que le triangle ADC est équilatéral.

e. Préciser R(K).

f. Soit L=O*D. montrer que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IL}$.

2) On pose : $g = t_{\overrightarrow{BA}} \circ S_O$.

a. Déterminer g(C), puis Caractériser g

b. Pour un point M quelconque du plan, on associe les points M' et M" définis par : $M' = t_{\overrightarrow{BA}}(M)$ et $M'' = S_O(M)$

Montrer que : I est le milieu de [M'M"]

c. Déduire l'ensemble des points M du plan tel que M'M" = AB.

3)

a. Montrer qu'il existe un unique antidéplacement ψ qui envoi A en B et B en O.

b. Montrer que ψ est une symétrie glissante.

c. Déterminer les éléments caractéristiques de ψ.

d. Montrer que ψ(O)=D

e. Soit F=ψ(D), Montrer que O=F*A, puis placer F.

4) Soit φ l'antidéplacement qui transforme F en A et B en C.

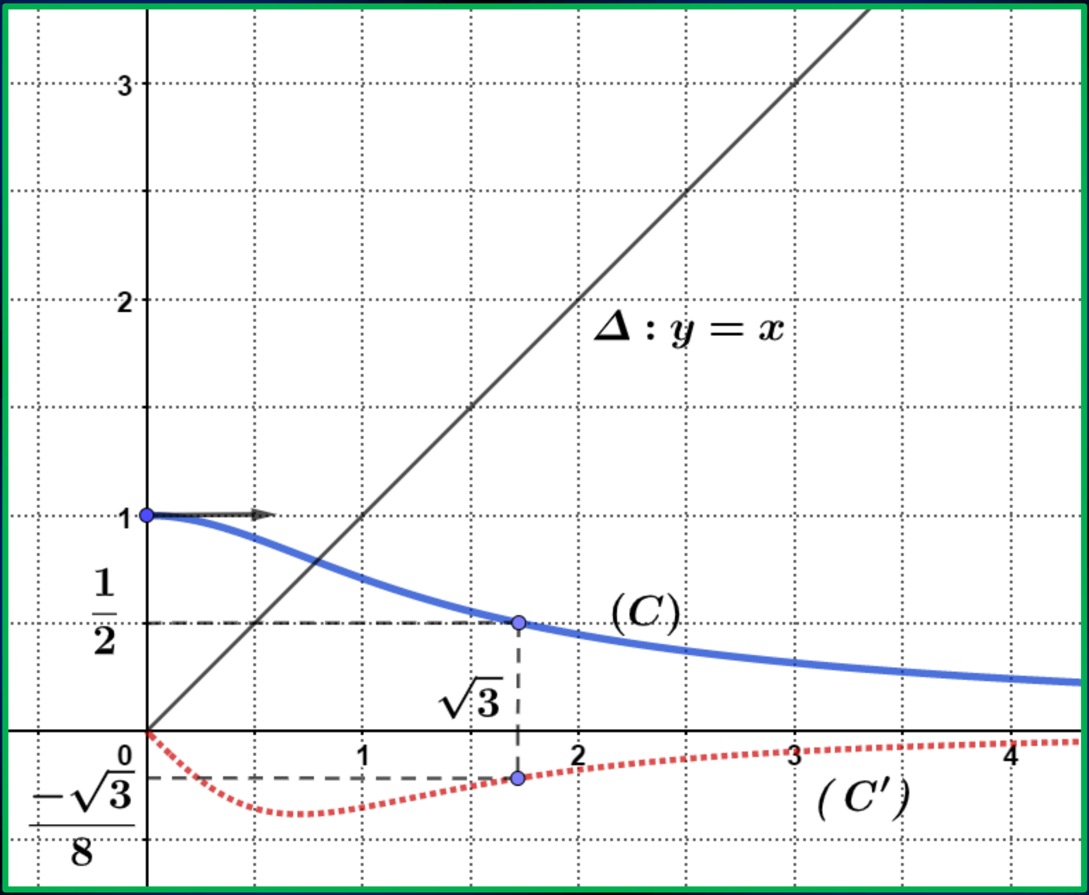
a. Montrer que $\varphi = S_O \circ S_{(FB)}$

b. Déterminer la droite Δ telle que : $S_O = S_{(OK)} \circ S_\Delta$.

c. Déduire que $\varphi = S_{(OI)} \circ t_{\overrightarrow{BA}}$

d. Préciser et construire le point E= φ^{-1}(F).

Exercice 1.



Exercice 4.