Devoir de Synthèse n°2

28-02-2022. (4h)

SMAALI.

Exercice n°1. (2.25 pts)

Questions indépendantes :

1) Pour tout n∈IN*, on pose : $\mathbf{I_n} = \int_0^3 \mathbf{2 + 4x + 6x^2 + \cdots + 2(n+1)x^n \quad dx}$.

Choisir en justifiant, la valeur exacte de, I_n :

a. $I_n = 3^n - 3$

b. $I_n = 3^{n+1} - 3$

c. $I_n = 3^{n+2} - 3$

2) Soit f la similitude indirecte d'écriture complexe : $\mathbf{z' = 2i\,\overline{z} - 1 - i}$ et le point I (1+i).

Choisir en justifiant la proposition correcte :

a. f est de rapport 2, de centre I et d'axe (OI).

b. f est de rapport 2, de centre I et d'axe Δ : x+2y-3=0.

c. f est de rapport 2, de centre I et d'axe Δ : x-2y-3=0.

3) Pour tout n∈IN*, on a: $(n+1)^n \equiv 1 \pmod{n^2}$.

a. VRAI.

b. FAUX.

c. Peut-être.

Exercice n°2. (7.25 pts)

Partie A.

Soit f la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} \mathbf{f(x) = Ln(x^2+1)} & \mathbf{si\ x < 0} \\ \mathbf{f(x) = x\,Ln(x+1)} & \mathbf{si\ x \geq 0} \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) a. Vérifier que f est continue en 0.

b. Montrer que f est dérivable en 0.

2) Soit g la fonction définie sur$]0, +\infty[$par : $\mathbf{g(x) = Ln(x+1) + \frac{x}{x+1}}$

a. Dresser le tableau de variations de g.

b. Déduire le signe de g(x) pour tout x>0.

3) a. Vérifier que pour tout x>0, **f '(x)=g(x).**

b. Dresser le tableau de variation de f sur IR.

4) a. Etudier la position de (C) par rapport à la droite Δ : y=x sur [0, +∞ [.

b. Tracer (C) et Δ.

5) Soit h la restriction de f à [0, +∞ [.

a. Montrer que h réalise une bijection de [0, +∞ [sur [0, +∞ [.

b. Tracer la courbe (Γ) de h^{-1} dans le même repère que (C).

Partie B.

Pour tout n∈IN*, on considère les fonctions F_n et G_n définies sur IR_+ par,

$\mathbf{F_n(x) = \int_0^x t^n Ln(t+1)\ dt}$ **et** $\mathbf{G_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n+1}}{t+1}\ dt}$, et on pose $\mathbf{Un = (n+1)F_n(1)}$.

1)

a. Etudier les variations de la fonction $\boldsymbol{\varphi} : \mathbf{x \longmapsto G_n(x) - \frac{x^{n+2}}{n+2}}$ sur IR_+

b. Déduire que pour tout x≥0 on a, $\mathbf{G_n(x) \leq \frac{x^{n+2}}{n+2}}$

c. Montrer que pour tout x≥0 on a, **G_n(x)≥0**. En déduire $\mathbf{\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(1)}$

2) Soit H_n la fonction définie sur IR_+ par : $\mathbf{H_n(x) = x^{n+1}Ln(x+1) - G_n(x)}$

a. Calculer **H_n'(x)** pour tout x≥0.

b. En déduire que pour tout n∈IN* on a, $\mathbf{Un = Ln(2) - G_n(1)}$; et calculer $\mathbf{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n}$

3) a. Montrer que pour tout n∈IN* et pour tout x∈IR_+ on a :

$$\mathbf{1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n = \frac{1}{x+1} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{x+1}}.$$

b. En déduire que $\mathbf{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = Ln(x+1) + (-1)^n G_n(x)}$. :

c. Montrer que pour tout n∈IN* on a : $\mathbf{Ln(2) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = (-1)^{n+1}(Ln(2) - U_n)}$

d. En déduire la valeur de $\mathbf{\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots \frac{(-1)^n}{n+1}}$

Exercice n°3. (3 pts)

Le but de l'exercice est de montrer que pour tout entier naturel n on ne peut pas écrire $2^n + 1$ sous forme de p^3 avec p un nombre premier strictement supérieur à 3.

Pour cela on suppose par l'absurde qu'il existe un entier naturel premier p Strictement supérieur à 3 tel que $2^n + 1 = p^3$.

1) a/ Montrer que si <u>n est impair</u> alors $2^n + 1 \equiv 0 (mod\ 3)$

b/ Déduire que p=3; conclure.

2) On suppose que <u>n est pair, donc n=2k avec k ∈ IN</u>.

a/ Montrer que si <u>k est impair</u> alors $2^n + 1 \equiv 0 (mod\ 5)$

b/ Déduire que si k est impair alors p=5.

c/ Montrer alors que si k est impair alors 31 divise 2^n ; Conclure.

3) On suppose que k est pair, alors n=2(2q) avec q$\in$ IN.

a/ Déterminer dans ce cas les restes possibles de $2^n + 1$ modulo 7.

b/ Pour un entier m; quels sont les restes possibles de m^3 modulo 7?

c/ Conclure.

Exercice n°4. (3 pts)

On considère la suite (u_n) définie sur IN par :

$u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 10u_n + 21$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.

2) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $3u_n = 10^{n+1} - 7$.

b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'écriture décimale de u_n.

3) Montrer que u_2 est un nombre premier.

4) On se propose maintenant d'étudier la divisibilité des termes de la suite (u_n) par certains nombres premiers.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.

5) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $3u_n \equiv 4 - (-1)^n$ (modulo 11).

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, u_n n'est pas divisible par 11.

6) a) Démontrer que $10^{16} \equiv 1$ (modulo 17).

b) En déduire que, pour tout entier naturel k, u_{16k+8} est divisible par 17.

Exercice n°5. (4.5 pts)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle en A
et tel que $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{6} [2\pi]$.
Soit D le point du plan tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{KC}$ et soit K le symétrique de B par rapport à A.
On désigne par O, I et J les milieux respectifs des segments [AC], [BC] et [BD]

1) Soit S la similitude directe du plan telle que S(D) = B et S(I) = K

a) Déterminer le rapport et l'angle de S.

b) Montrer que C, est le centre de la similitude S

2) Soit A' le symétrique de D par rapport à C

a) Montrer qu'il existe un seul antidéplacement f tel que f(D) = A et f(A)= A'.

b) Montrer que f est une symétrie glissante dont on déterminera l'axe et le vecteur

c) Montrer que f(B) = C

3) On pose g = f o S

a) Montrer que g est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.

b) Déterminer g o g(D)

c) Construire le centre W de g et son axe D.

4) On pose $h = g^{-1}$ o f o g

a) Vérifier que $h = S^{-1}$o g

b) Montrer que h est une symétrie glissante que l'on caractérisera.