BAC BLANC

12/05/2022

4°M

Enoncé

& Corrigé

LA²K

Lycée Ahmed Amara

KEF.

Par : *Smaali. Mondher.*

BAC BLANC.

12-05-2022. (4h)

SMAALI.

Enoncé

Exercice n°1. (7 pts)

Soit f la fonction définie et continue sur $[1,+\infty[$ par : $\mathbf{f(x)=e^{-x.\sqrt{\ln(x)}}}$.

1)

a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1.

b) Vérifier que pour tout x>1 on a : $\mathbf{f'(x)=-\frac{1+2\ln(x)}{2\sqrt{\ln(x)}}f(x)}$.

c) Dresser le tableau de variations de f.

d) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $]0,1]$.

2)

a) Montrer que l'équation $f(x)=\frac{1}{2}x$ admet dans $[1,+\infty[$ une unique solution α, et que 1,19 < α < 1,20.

b) Déduire que l'équation $f^{-1}(x)=2x$ admet dans $]0,1]$ une unique solution que l'on précisera.

c) Construire dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, (en annexe) les droites $D: y=x$, $D': y=\frac{1}{2}x$ et $D'': y=2x$ ainsi que (C_f) et $(C_{f^{-1}})$.

3) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie $\mathcal{P}$ du plan délimitée par (C_f), (C_f^{-1}) et les droites d'équations : $y = 2x$ et $y = \frac{\alpha}{2}$.

a) Hachurer $\mathcal{P}$.

b) Montrer que : $\mathcal{A}=1-\frac{11}{16}\alpha^2+\int_1^\alpha 2f(x)\,.\,dx$

c) Déduire que : $1-\alpha+\frac{5}{16}\alpha^2<\mathcal{A}<3-\frac{11}{16}\alpha^2$.

4) Pour $x\geq 1$ et pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_n(x)=\int_1^x \frac{[\ln f(t)]^n}{t^{n+1}}dt$ et $S_n=\sum_{k=1}^{k=n} I_k(e)$.

a) Montrer que $I_n(x)=\frac{2(-1)^n}{n+2}e^{\left(\frac{n+2}{2}\right).Ln(Lnx)}$

b) Calculer les intégrales : $J=\int_1^0 \frac{x^2}{1+x}\,dx$ et $J_n=\int_1^0(-x)^{n+1}dx$, $n\in\mathbb{N}^*$.

c) Montrer que : $\sum_{k=1}^{k=n} J_k=J+\int_0^1 \frac{(-x)^{n+2}}{1+x}dx$

d) Montrer que $\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x}dx\leq\frac{1}{n+3}$, et déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x}dx\right)$

e) On admet que la suite (S_n) est convergente, déterminer sa limite.

Exercice n°2. (9 pts)

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) Soit l'équation $(\mathbf{E})$: $\mathbf{7x-3y=5}$, d'inconnue (x, y) de $\mathbb{Z}^2$.

a) Montrer que les solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$ sont les couples de la forme $(\mathbf{3k+2}\ ,\ \mathbf{7k+3})$ où k est un entier.

b) On note **d=x∧y**. quelles sont les valeurs possibles de **d**.

c) Déterminer l'ensemble

$$\mathbf{H}=\{(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbb{Z}^2\ \textbf{tels que}\ \mathbf{7x-3y=5}\ \textbf{et}\ |\mathbf{xy}|=\mathbf{5}\,.\,\mathbf{x}\vee\mathbf{y}\}.$$

2) Soit l'équation $(\mathbf{F})$: $\mathbf{z^3-5iz^2-(3+8i)z+8-9i=0}$, d'inconnue z de $\mathbb{C}$

a) Montrer que (F) admet une solution imaginaire pure $\mathbf{z_0}$ que l'on déterminera.

b) Déterminer les deux autres solutions z_1 et z_2 de (F), tel que Ré(z_1) <0.

c) Montrer que, ABC est un triangle rectangle, où $\mathbf{A(z_1)}$; $\mathbf{B(z_2)}$ et $\mathbf{C(z_0)}$.

3) Dans toute la suite, on prendra : A (-2+i), B (2+5i) et C (-i).

Soit l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe z′ tel que : $\mathbf{z'} = \frac{1}{2}\overline{\mathbf{i}\,(\mathbf{z}+\mathbf{2})} - \frac{1}{2}$.

a) Montrer que f est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.

b) Vérifier que le point C est le centre de f et que son axe est la droite (AC).

4) On note A_0 le point O et, pour tout entier n, on pose $\mathbf{A_{n+1}=f(A_n)}$

a) Déterminer l'affixe du point A_1 puis calculer CA_0 et CA_1.

b) Pour tout entier n, on pose $\mathbf{u_n = CA_n}$.

Montrer que la suite (u_n) est géométrique puis établir que, pour tout entier n, $\mathbf{u_n = 2^{-n}}$.

c) A partir de quel rang n_0, les points A_n appartiennent au disque de centre C et de rayon 0,01 ?

5) Soit g la similitude indirecte qui envoie O en C et A en B.

a) Donner l'écriture complexe de g.

b) On pose **h=fog.**

Soit M(z) un point quelconque du plan et M′(z′) son image par h.

Montrer que, $\mathbf{z' = (1+i)z - i}$.

c) Caractériser la transformation h.

6) Soit M un point d'affixe $\mathbf{z = x + iy}$ **et** $\mathbf{M' = h(M)}$.

a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{OM'}}et\overrightarrow{\mathbf{OB}}$ sont orthogonaux si et seulement si M(x, y) appartient à la droite $\mathbf{\Delta: 7x + 3y - 5 = 0}$.

b) Déterminer alors tous les points M de coordonnées entiers appartenant au disque de centre O et de rayon $5\sqrt{5}$ tel que le triangle **OBM′**soit rectangle en O.

Exercice n°3. (4 pts)

On considère une urne contenant le même nombre de jetons Blancs que de jetons Noirs, tous indiscernables au toucher.

On effectue une succession de n tirages avec remise d'un jeton de l'urne ($n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$).

- On dit que la première série est de longueur k (où k est un entier tel que $1 \leq k \leq n-1$) lorsque les k premiers tirages ont amené la même couleur et le $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage amène l'autre couleur.
- On dit que la première série est de longueur n lorsque les n tirages ont amené la même couleur.

On appelle X la variable aléatoire égale à la longueur de la première série.

1) **a)** Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Déterminer la probabilité de l'évènement $(X=n)$.

c) Pour tout $k \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$, exprimer en fonction de k, La probabilité de l'évènement $(X=k)$.

2) Soit $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1}$; $x \in [0, 1[$.

a) Donner de deux façons différentes, deux expressions de $f'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x \in [0, 1[$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} k.x^{k-1} = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^{n-1}}{1-x}$$

c) Vérifier que :

$$1.\left(\frac{1}{2}\right) + 2.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3.\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + (n-1).\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] - \frac{n}{2^{n-1}}$$

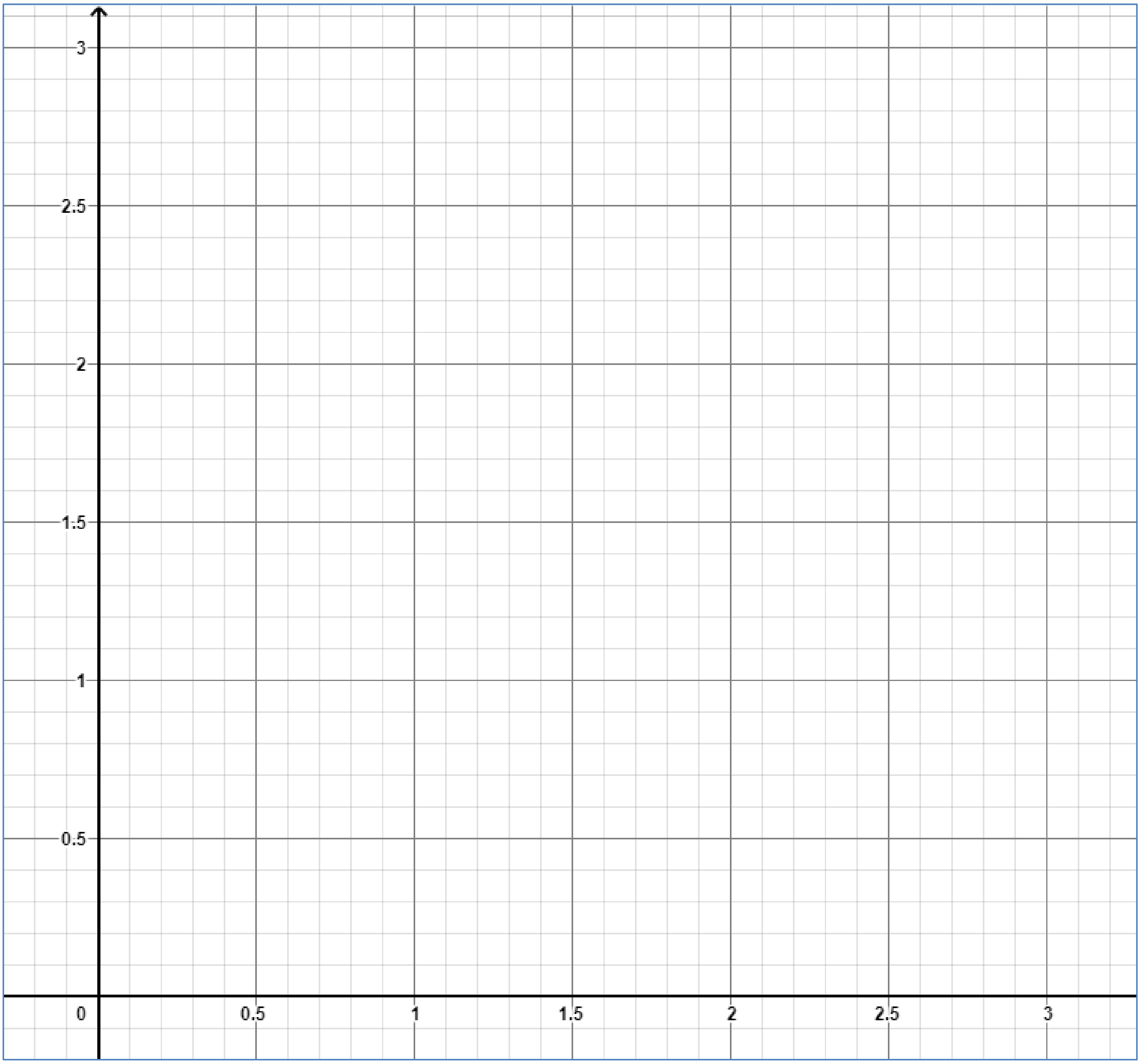
3)

a) Déterminer, E(X) l'espérance de X, en fonction de n.

b) En déduire : $\lim_{n \to +\infty} E(X)$

ANNEXE.

Nom & Prénom :



BAC BLANC.

12-05-2022. (4h)

SMAALI.

Corrigé

Exercice n°1. (7 pts)

Soit f la fonction définie et continue sur $[1,+\infty[$ par : $\mathbf{f(x)=e^{-x.\sqrt{\ln(x)}}}$.

1)

a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1.

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{e^{-x\sqrt{\ln x}}-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{e^{-x\sqrt{\ln x}}-1}{-x\sqrt{\ln x}}\right).\left(\frac{\ln x}{x-1}\right).\left(\frac{-x}{\sqrt{\ln x}}\right)=-\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 1.

b) Vérifier que pour tout x>1 on a : $\mathbf{f'(x)=-\frac{1+2\ln(x)}{2\sqrt{\ln(x)}}f(x)}$.

$$f'(x)=\left(-x\sqrt{\ln x}\right)'.e^{-x\sqrt{\ln x}}=-\left(1.\sqrt{\ln x}+x.\frac{1}{x.2\sqrt{\ln x}}\right).e^{-x\sqrt{\ln x}}=-\left(\frac{1+2\ln x}{2\sqrt{\ln x}}\right).f(x)$$

c) Dresser le tableau de variations de f.

Pour x>0, f'(x)<0 donc f est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}e^{-x\sqrt{\ln x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{-\sqrt{x^2\ln x}}=0$$

D'où le T.V. de f :

x	1	$+\infty$
f'(x)	‖	----------
f	1 ↘	0

d) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur]0,1].

f est continue et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ dans $]0, 1]$ donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $]0, 1]$.

2)

a) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}x$ admet dans $[1, +\infty[$ une unique solution α, et que $1,19 < \alpha < 1,20$.

Soit $u(x)=f(x)-x/2$.

* u est dérivable sur $[1, +\infty[$ et $u'(x)=f'(x)-1/2 \leq 0$ donc u est str.↘ sur $[1, +\infty[$ en plus $u([1, +\infty[)=]-\infty,1/2]$ contient 0.

D'après TVI : $u(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=x/2$ admet unique solution α dans $[1, +\infty[$.

* $u(1,19).u(1,20)=0,013 . (-0,0009) <0$ donc $1,19 < \alpha < 1,20$.

b) Déduire que l'équation $f^{-1}(x) = 2x$ admet dans $]0, 1]$ une unique solution que l'on précisera.

Soit $y=f^{-1}(x)$.

$f^{-1}(x)=2x \Leftrightarrow y=2f(y) \Leftrightarrow f(y)=y/2$ admet unique solution

➔ $y=\alpha$ (unique) $\Leftrightarrow$ $x=f(\alpha)=$**$\alpha/2$** (unique)

c) Construire dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, (en annexe) les droites $D: y = x$, $D' : y = \frac{1}{2}x$ et $D'' : y = 2x$ ainsi que (C_f) et $(C_{f^{-1}})$.

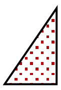
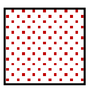
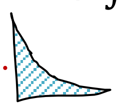
Voir annexe.

3)

Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie $\mathcal{P}$ du plan délimitée par (C_f), $(C_{f^{-1}})$ et les droites d'équations : $y = 2x$ et $y = \frac{\alpha}{2}$.

a) Hachurer $\mathcal{P}$. voir annexe.

b) Montrer que : $\mathcal{A}=1 - \frac{11}{16}\alpha^2 + \int_1^\alpha 2f(x)\,.dx$

$\mathcal{A}=$  +  + 2. 

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{4}\right)\left(\alpha - \frac{\alpha}{2}\right) + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + 2.\int_1^\alpha \left(f(x) - \frac{\alpha}{2}\right) dx$$

$$= \frac{\alpha^2}{16} + 1 + \frac{\alpha^2}{4} - \alpha + 2\int_1^\alpha f(x)dx - \int_1^\alpha \alpha\, dx = 1 - \frac{11}{16}\alpha^2 + \int_1^\alpha 2f(x)\, dx$$

c) Déduire que : $1 - \alpha + \frac{5}{16}\alpha^2 < \mathcal{A} < 3 - \frac{11}{16}\alpha^2$

$1 \leq x \leq \alpha \Leftrightarrow 2f(\alpha) \leq 2f(x) \leq 2f(1) \Leftrightarrow \alpha \leq 2f(x) \leq 2$

$$1 - \frac{11}{16}\alpha^2 + \int_1^\alpha \alpha\, dx \leq A \leq 1 - \frac{11}{16}\alpha^2 + \int_1^\alpha 2\, dx$$

$$\leftrightarrow \frac{5}{16}\alpha^2 - \alpha + 1 \leq A \leq 2\alpha - 1 - \frac{11}{16}\alpha^2 < \frac{3}{2} - \frac{11}{16}\alpha^2$$

4) Pour x≥1 et pour n∈IN*, on pose $I_n(x)=\int_1^x \frac{[\ln f(t)]^n}{t^{n+1}}dt$ et $S_n=\sum_{k=1}^{k=n} I_k(e)$.

a) Montrer que $I_n(x)=\frac{2(-1)^n}{n+2}e^{\left(\frac{n+2}{2}\right).Ln(Lnx)}$

$$I_n(x)=\int_1^x \frac{[\ln f(t)]^n}{t^{n+1}}dt=\int_1^x \frac{\left(-t\sqrt{\ln t}\right)^n}{t^{n+1}}\,dt=\int_1^x \frac{1}{t}\left(-\sqrt{\ln t}\right)^n dt=(-1)^n\int_1^x \frac{1}{t}\,(\ln t)^{\frac{n}{2}}dt$$

$$=(-1)^n\left[\frac{(\ln t)^{\frac{n}{2}+1}}{\frac{n}{2}+1}\right]_1^x=(-1)^n\frac{(\ln x)^{\frac{n+2}{2}}}{\frac{n+2}{2}}=\frac{2(-1)^n}{n+2}e^{\frac{n+2}{n}.\ln(\ln x)}$$

b) Calculer les intégrales : $J=\int_1^0 \frac{x^2}{1+x}\,dx$ et $J_n=\int_1^0(-x)^{n+1}dx$, n∈IN*.

$$J=\int_1^0 \frac{x^2}{1+x}dx=\int_1^0 x-1+\frac{1}{1+x}\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-x+\ln(1+x)\right]_1^0=\frac{1}{2}-\ln 2.$$

$$J_n=\int_1^0(-x)^{n+1}dx=(-1)^{n+1}\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_1^0=(-1)^{n+1}\left(-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{(-1)^{n+2}}{n+2}.$$

c) Montrer que : $\sum_{k=1}^{k=n} J_k=J+\int_0^1\frac{(-x)^{n+2}}{1+x}dx$

$$\sum_{k=1}^{k=n} J_k=\sum_{k=1}^{k=n}\left(\int_1^0(-x)^{n+1}dx\right)=\int_1^0\left(\sum_{k=1}^{k=n}(-x)^{n+1}\right)dx=\int_1^0\left((-x)^2\left(\frac{1-(-x)^n}{1-(-x)}\right)\right)dx$$

$$=\int_1^0\frac{x^2}{1+x}dx-\int_1^0\frac{(-x)^{n+2}}{1+x}dx=J+\int_0^1\frac{(-x)^{n+2}}{1+x}dx.$$

d) Montrer que $\int_0^1\frac{x^{n+2}}{1+x}dx\le\frac{1}{n+3}$, et déduire $\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1\frac{x^{n+2}}{1+x}dx\right)$

$$0\le x\le 1\ \leftrightarrow\ 1\le 1+x\le 2\ \leftrightarrow\ ½\le\frac{1}{1+x}\le 1\ \leftrightarrow\ 0<\frac{x^{n+2}}{1+x}\le x^{n+2}$$

$$\leftrightarrow\ 0<\int_0^1\frac{x^{n+2}}{1+x}dx\le\int_0^1 x^{n+2}dx=\left[\frac{x^{n+3}}{n+3}\right]_0^1=\frac{1}{n+3}$$

$$\text{Comme,}\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+3}=0\quad\text{alors}\quad\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1\frac{x^{n+2}}{1+x}dx\right)=0$$

e) On admet que la suite (S_n) est convergente, déterminer sa limite.

$$S_n=\sum_{k=1}^{k=n} I_k(e)=\sum_{k=1}^{k=n} 2.\frac{(-1)^k}{k+2}=\sum_{k=1}^{k=n} 2.\frac{(-1)^{k+2}}{k+2}=2.\sum_{k=1}^{k=n} J_k$$

$$=2.J+2.\int_0^1 \frac{(-x)^{n+2}}{1+x}dx=1-2\ln 2+2.(-1)^{n+2}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x}dx$$

$$\text{or,}\quad \left|(-1)^{n+2}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x}dx\right|=\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x}dx \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{} 0$$

$$\text{Donc,}\quad \lim_{n\to+\infty} S_n=1-2\ln 2=\ln\left(\frac{e}{4}\right).$$

Exercice n°2. (9 pts)

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) Soit l'équation $(\mathbf{E}):\mathbf{7x-3y=5}$, d'inconnue (x, y) de $\mathbb{Z}^2$.

a) Montrer que les solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$ sont les couples de la forme $(\mathbf{3k+2}\ ,\ \mathbf{7k+3})$ où k est un entier.

$(E)\rightarrow 7x\equiv 5[3]\Leftrightarrow x\equiv 2[3]\Leftrightarrow x=3k+2, k\in\mathbb{Z}$

$(E)\rightarrow 3y\equiv -5[7]\Leftrightarrow 5(3y)\equiv -25[7]\Leftrightarrow y\equiv 3[7]\Leftrightarrow y=7k'+3, k'\in\mathbb{Z}$

(x,y) solution de (E) alors 7(3k+2)-3(7k'+3)=5 donc k=k'

Par suite les solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$ sont les couples $(3k+2\ ,7k+3)$; k$\in\mathbb{Z}$.

b) On note **d=x∧y**. quelles sont les valeurs possibles de **d**.

d|x et d|y donc d|7x-3y càd. d|5 alors d=1 ou d=5.

c) Déterminer l'ensemble

$$\mathbf{H=\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2\ tels\ que\ 7x-3y=5\ et\ |xy|=5\,.x\vee y\}}.$$

* |xy|=5.x∨y sig x∧y=5 donc x=5x' et y=5y' avec x'∧y'=1

* 7x-3y=5 →7x'-3y'=1 → 7(x'-1)=3(y'-2) → x'=3n+1 et y'=7n+2, n∈ℤ.

Alors x=15n+5 et y=35n+10

Vérification (réciproquement) :

7x-3y=7(15n+5)-3(35n+10)=5 **et** x∧y=5(3n+1)∧5(7n+2)=5[(3n+1) ∧(7n+2)]=5

➔ H= {(15n+5, 35n+10) ; n∈ℤ}.

2) Soit l'équation $(\mathbf{F}):\mathbf{z^3-5iz^2-(3+8i)z+8-9i=0}$, d'inconnue z de $\mathbb{C}$

a) Montrer que (F) admet une solution imaginaire pure $\mathbf{z_0}$ que l'on déterminera.

Soit z_0=yi une solution imaginaire de (F)

→ $(yi)^3-5i(yi)^2-(3+8i)(yi)+8-9i=0$

→ $-iy^3+5iy^2-3iy+8y+8-9i=0$ → $8y+8=0$ et $-y^3+5y^2-3y-9=0$ →y=-1 et <u>z_0=-i</u>

b) Déterminer les deux autres solutions z_1 et z_2 de (F), tel que Ré (z_1) <0.

Factorisation de $P(z)=z^3-5iz^2+(3+8i)z-8-9i$

$P(z)=(z+i)(z^2+az+b)=z^3+(i+a)z^2+(ai+b)z+ib$

$\Rightarrow$ Par identification on aura $a=-6i$ et $b=-9-8i$

$\Rightarrow$ (F) : $(z+i)(z^2-6iz-9-8i)=0$

* $z+i=0 \Leftrightarrow z=-i$

* $z^2-6iz-9-8i=0 \rightarrow \Delta=32i=16.(2i)$ ($\rightarrow \delta=4(1+i)$)

$\rightarrow z'=2+5i$ et $z''=-2+i$ <u>$z_1=-2+i$ et $z_2=2+5i$</u>

c) Montrer que, ABC est un triangle rectangle, où $\mathbf{A(z_1)}$; $\mathbf{B(z_2)}$ **et** $\mathbf{C(z_0)}$.

$\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{4+4i}{2-2i}=2i \in i\,IR^*$ $\rightarrow$ ABC est un triangle rectangle en A.

3) Soit l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $\mathbf{z'=\frac{1}{2}\overline{\imath\,(z+2)}-\frac{1}{2}}$.

a) Montrer que f est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.

$z'=-\frac{1}{2}i\,\overline{z}-\frac{1}{2}-i$ de la forme $z'=a\,\overline{z}+b$ où $a=-1/2i\neq 0$

$\rightarrow$ f est une similitude indirecte, de rapport $k=|a|=1/2$.

b) Vérifier que le point C est le centre de f et que son axe est la droite (AC).

* $z'_C=\frac{1}{2}\overline{\imath(-\imath+2)}-\frac{1}{2}=-i=z_C$ donc f(C)=C $\rightarrow$ C est le centre de f.

* soit Δ l'axe de f.

$M(z=x+iy)\in\Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{CM'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CM}$ où $M'=f(M)$

$\Leftrightarrow z'+i=\frac{1}{2}(z+i) \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(x+iy)-\frac{1}{2}-i+i=\frac{1}{2}(x+iy+i)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(y+1)+\frac{i}{2}x=-\frac{x}{2}-\frac{i}{2}(y+1)$

Donc : $y=-x-1$ c'est l'équation de la droite (AC). $\rightarrow \Delta=(AC)$.

4) On note A_0 le point O et, pour tout entier n, on pose $\mathbf{A_{n+1}=f(A_n)}$

a) Déterminer l'affixe du point A_1 puis calculer CA_0 et CA_1.

$z_{A_1}=-\frac{1}{2}i.0-\frac{1}{2}-i=-\frac{1}{2}-i$

$CA_0=|0-(-i)|=1$

$CA_1=\left|-\frac{1}{2}-i-(-i)\right|=\frac{1}{2}$

b) Pour tout entier n, on pose $\mathbf{u_n=CA_n}$.

Montrer que la suite (u_n) est géométrique puis établir que, pour tout entier n, $\mathbf{u_n = 2^{-n}}$.

$u_{n+1} = CA_{n+1} = \frac{1}{2}CA_n = \frac{1}{2}u_n$

$$\text{donc } (u_n) \text{est une S.G. de raison } q = \frac{1}{2} \text{ et de premier terme } u_0 = CA_0 = 1$$

$\rightarrow u_n = u_0 . q^n = 1.\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2^{-n}$

c) A partir de quel rang n_0, les points A_n appartiennent au disque de centre C et de rayon 0,01 ?

$CA_n \leq 0,01 \Leftrightarrow u_n \leq 0,01 \Leftrightarrow 2^{-n} \leq 10^{-2} \Leftrightarrow -n \ln 2 \leq -2 \ln 10 \Leftrightarrow n \geq 2 \ln 10 / \ln 2 \approx 6,6$

$\underline{n_0=7}$

5) Soit g la similitude indirecte qui envoie O en C et A en B.

a) Donner l'écriture complexe de g.

$g : P \rightarrow P$, $M(z) \rightarrow M'(z')$: $z' = a\,\overline{z} + b$

$*g(O)=C \Rightarrow -i=a.0+b \Rightarrow b=-i$

$*g(A)=B \Rightarrow 2+5i=a(-2-i)+b \Rightarrow a = \frac{2+6i}{-2-i} = -2-2i$

$\Rightarrow$ g: $z' = (-2-2i)\,\overline{z} - i.$

b) On pose **h=fog.**

Soit M(z) un point quelconque du plan et M'(z') son image par h.

Montrer que, $\mathbf{z' = (1+i)z - i.}$

Soit M'=h(M), on pose g(M)=M'' et f (M'')=M'

Donc : $\begin{cases} z'' = (-2-2i)\,\overline{z} - i \\ z' = -\frac{1}{2}i\,\overline{z''} - \frac{1}{2} - i \end{cases} \rightarrow z' = -\frac{1}{2}i\big((-2+2i)z + i\big) - \frac{1}{2} - i = (1+i)z - i$

c) Caractériser la transformation h.

L'écriture complexe de h est de la forme z'=az+b où a=1+i ≠ **0** et b=-i

$\rightarrow$ h est une similitude directe,

de rapport $k = |a| = \sqrt{2}$

d'angle $\theta \equiv \arg(a)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

Et de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a} = 1.$

6) Soit M un point d'affixe $\mathbf{z = x + iy}$ **et** $\mathbf{M' = h(M)}$.

a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{OM'}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{OB}}$ sont orthogonaux si et seulement si M(x, y) appartient à la droite $\mathbf{\Delta : 7x + 3y - 5 = 0}$.

$\overrightarrow{OM'} \perp \overrightarrow{OB}$ ssi $\dfrac{z_{M'} - z_O}{z_B - z_O} \in i\,IR \leftrightarrow \dfrac{(1+i)(x+iy) - i}{2+5i} \in iIR$

$\leftrightarrow \big((x-y) + i(x+y-1)\big)(2-5i) \in iIR \leftrightarrow 2(x-y) + 5(x+y-1) = 0$

$\leftrightarrow 7x + 3y - 5 = 0$: droite Δ.

b) Déterminer alors tous les points M de coordonnées entiers appartenant au disque de centre O et de rayon $5\sqrt{5}$ tel que le triangle **OBM'** soit rectangle en O.

$$\begin{cases} M' = h\big(M(x,y)\big) \\ OBM' \text{rectangle en } O \\ (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \\ M(x,y) \in D\big(O, 5\sqrt{5}\big) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M' = h\big(M(x,y)\big) \\ \overrightarrow{OM'} \perp \overrightarrow{OB} \\ (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \\ OM \leq 5\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x + 3y = 5 \\ (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \\ x^2 + y^2 \leq 125 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x,-y) \text{solution de } (E) \\ x^2 + y^2 \leq 125 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3k + 2 \\ y = -7k - 3 \\ x^2 + y^2 \leq 125 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$x^2 + y^2 - 125 = 0 \Leftrightarrow 29k^2 + 27k - 56 = 0 \Leftrightarrow (k-1)(29k+56) = 0.$

k	$-\infty$		$-\frac{56}{29}$		1		$+\infty$
$29k^2+27k-56$		+	0	--	0	+	

Donc, $k \in \left[-\frac{56}{29}, 1\right] \rightarrow k \in \{-1, 0, 1\} \rightarrow M(x,y) \in \{(-1,4); (2,-3); (5,-10)\}$

Exercice n°3. (4 pts)

On considère une urne contenant le même nombre de jetons Blancs que de jetons Noirs, tous indiscernables au toucher.

On effectue une succession de n tirages avec remise d'un jeton de l'urne ($n \in IN^* \setminus \{1\}$).

- On dit que la première série est de longueur k (où k est un entier tel que $1 \leq k \leq n-1$) lorsque les k premiers tirages ont amené la même couleur et le (k+1) ème tirage amène l'autre couleur.
- On dit que la première série est de longueur n lorsque les n tirages ont amené la même couleur.

On appelle X la variable aléatoire égale à la longueur de la première série.

1)

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

$X \in \{1, 2, 3, \dots \dots \dots, (n-1), n\}$.

b) Déterminer la probabilité de l'évènement (X=n).

(X=n) : « avoir n jetons de même couleur »

N	N	....	N	N

ou

B	B	....	B	B

n fois. n fois.

$$\rightarrow \ p(X = n) = 2.\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

c) Pour tout $k \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$, exprimer en fonction de k,

La probabilité de l'évènement (X=k).

(X=k) : « avoir les k premiers jetons de même couleur et le (k+1) ème de couleur différente »

N	N	...	N	B	x	...

ou

B	B	...	B	N	x	...

k fois. k fois.

$$\rightarrow \ p(X = k) = 2.\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{k} . \frac{1}{2}\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^{k}$$

2)

Soit $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ \dots + x^{n-1}$; $x \in [0, 1[$.

a) Donner de deux façons différentes, deux expressions de f'(x).

- $f(x) = \underbrace{1+x+x^2+x^3+\dots+x^{n-1}}_{\Downarrow} \Rightarrow f'(x)=0+1+2x+3x^2+\dots+(n-1)x^{n-2}$.
- Somme de n termes successifs d'une suite géométrique de raison $x \neq 1$

$$f(x) = \frac{x^n - 1}{x-1} \rightarrow f'(x) = \frac{(nx^{n-1})(x-1) - 1.(x^n - 1)}{(x-1)^2}.$$

b) En déduire que pour tout $x \in [0, 1[$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} k.x^{k-1} = \frac{1 - x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^{n-1}}{1-x}$$

Des deux expressions de f'(x), on peut dire que :

$$f'(x) = \frac{(nx^{n-1})(x-1) - (x^n - 1)}{(x-1)^2} = 0 + 1 + 2x + 3x^2 + \cdots . + (n-1)x^{n-2}$$

$$\rightarrow \frac{(nx^{n-1})(x-1)}{(x-1)^2} - \frac{x^n - 1}{(x-1)^2} = \sum_{k=1}^{k=n} kx^{k-1} \rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} k.x^{k-1} = \frac{1 - x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^{n-1}}{1-x}$$

c) Vérifier que :

$$1.\left(\frac{1}{2}\right)+2.\left(\frac{1}{2}\right)^2+3.\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+(n-1).\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]-\frac{n}{2^{n-1}}$$

$$1.\left(\frac{1}{2}\right)+2.\left(\frac{1}{2}\right)^2+3.\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+(n-1).\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+2.\left(\frac{1}{2}\right)^1+3.\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+(n-1).\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right]=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n-1}k.\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}\right]=\frac{1}{2}\left[4.\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)-2.n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$$

$$=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{n}{2^{n-1}}\right].$$

3)

a) Déterminer, E(X) l'espérance de X, en fonction de n.

$$E(X)=1.p(X=1)+2.p(X=2)+3.p(X=3)+\cdots.+(n-1).p(X=n-1)+n.p(x=n)$$

$$=1.\left(\frac{1}{2}\right)^1+2.\left(\frac{1}{2}\right)^2+3.\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+(n-1).\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+n.\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{n}{2^{n-1}}\right]+n.\left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad =2-2.\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{n}{2^{n-2}}+\frac{n}{2^n}$$

$$=2-2.\left(\frac{1}{2}\right)^n-3.\frac{n}{2^n}$$

b) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X)$

$$\lim_{n\to+\infty}E(X)=\lim_{n\to+\infty}2-2.\left(\frac{1}{2}\right)^n-3.\frac{n}{2^n}=2.$$

Car : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{2^n}{n}\right)}=0$

ANNEXE.

Nom & Prénom :