# DEVOIR DE CONTROLE N°3

18/04/2022

4°M

Enoncé

& Corrigé

Lycée Ahmed Amara

KEF.

Par : Smaali. Mondher.

**Devoir de Contrôle n°3**

**18-04-2022. (3h)**

**SMAALI.**

## Exercice n°1. (5,5 pts).

**Partie 1.**

1) a- Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide, deux entiers **a** et **b** tel que : $\mathbf{31a + 13b = 1}$.

   b- Déduire dans $[\![1, 30]\!]$, l'inverse de 13 modulo 31.

2) On donne dans $\mathbb{Z}\mathrm{x}\mathbb{Z}$, l'équation $(\mathbf{E})$ : $\mathbf{31x - 13y = 2}$.

   a- Justifier que (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}\mathrm{x}\mathbb{Z}$.

   b- Montrer que si (x, y) est solution de (E) alors $\mathbf{y \equiv 7[31]}$

   c- En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}\mathrm{x}\mathbb{Z}$ de l'équation (E).

3) Quel est le plus petit entier $n_0 \geq 10^4$, solution du système (S) : $\begin{cases} \mathbf{n \equiv 9[13]} \\ \mathbf{n \equiv 7[31]} \end{cases}$

**Partie 2.**

1) On considère les deux suites arithmétiques U et V définies sur IN par :

$$\begin{cases} \mathbf{U_0 = 2022} \\ \mathbf{U_{n+1} = u_n + 31} \end{cases} \quad \textbf{et} \quad \begin{cases} \mathbf{V_0 = 2024} \\ \mathbf{V_{n+1} = v_n + 13} \end{cases}$$

   a- Déterminer l'entier **r**, vérifiant : $2\mathbf{V_r} - \mathbf{U_r} = \mathbf{1}$ , et déduire $\mathbf{U_r \wedge V_r}$ .

   b- Déterminer tous les couples **(p, q)** de $[\![803, 2023]\!]^2$ tel que : $\mathbf{U_p = V_q}$.

2) Dans le plan muni d'un RON$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, On considère les deux points : $A(-23, -55)$ et $B(16, 38)$.

   Déterminer tous les points M de coordonnées (x, y) entières, situés sur le segment [AB] privé de A et B.

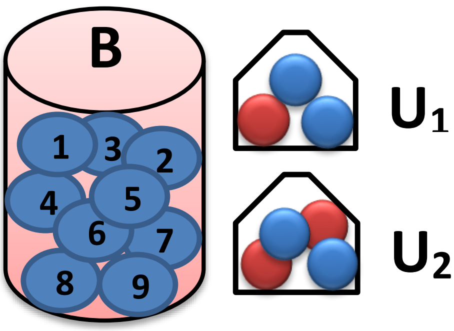
## Exercice n°2. (6 pts).

On dispose d'une boite B et de deux urnes $U_1$ et $U_2$.

B contient neuf jetons numérotés de 1 à 9.

$U_1$ contient une boule rouge et deux boules bleues.

$U_2$ contient deux boules rouges et deux boules bleues.



**1)** On tire au hasard, successivement et sans remise deux jetons de la boite B.
Calculer la probabilité de l'évènement :

**E** : « avoir un seul jeton portant un nombre premier».

**2)**

**a-** On tire une boule de l'urne $U_1$ et simultanément deux boules de l'urne $U_2$.
Calculer la probabilité de chacun des évènements :

**A** : « avoir une boule bleue de $U_1$ et deux boules rouges de $U_2$ »

**B** : « avoir une boule rouge de $U_1$ et deux boules couleurs différentes de $U_2$ »

**b-** On tire simultanément deux boules de l'urne $U_1$ et simultanément deux boules de l'urne $U_2$. Calculer la probabilité de chacun des évènements :

**C** : « avoir deux boules bleues de $U_1$ et deux boules rouges de $U_2$ »

**D** : « avoir deux boules de couleurs différentes de chaque urne »

**3)** On considère l'épreuve (E) suivante :

On tire au hasard, successivement et sans remise deux jetons de la boite B.

* Si un seul des deux jetons tirés porte un nombre premier, on tire une seule boule de l'urne $U_1$ et simultanément deux boules de l'urne $U_2$.

* Si NON, on tire simultanément deux boules de l'urne $U_1$ et simultanément deux boules de l'urne $U_2$.

Soit l'évènement **S :** « Obtenir à l'issue de l'épreuve (E) exactement deux boules rouges ».

**a-** On a eu un seul jeton portant un nombre premier de la boite B, calculer la probabilité d'obtenir deux boules rouges à l'issue de l'épreuve (E).

**b-** On n'a pas eu un seul jeton portant un nombre premier de la boite B, calculer la probabilité d'obtenir deux boules rouges à l'issue de l'épreuve (E).

**c-** Construire un arbre de probabilités résumant la situation.

**d-** Déduire que $\mathbf{p}(\mathbf{S}) = \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{27}}$

**4)** Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On répète l'épreuve (E), **n** fois de suite en remettant à chaque fois les jetons tiré dans la boite B et les boules tirées dans leurs urnes d'origine.
Soit **X** la variable aléatoire donnant le nombre de fois où l'évènement **S** est réalisé.

**a-** Déterminer dans le cas où n=3, la loi de probabilité de X.

**b-** De combien de fois au minimum faut-il répéter l'épreuve (E), pour avoir la probabilité $p_n$ que S soit réalisé au moins une fois, est supérieure à 0,9999?

## Exercice n°3. (6,5 pts)

On considère la fonction F définie par : $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$

**Partie 1.**

1)

a- Justifier que F est définie sur IR.

b- Etudier le sens de variation de F sur IR.

c- Montrer que F est impaire.

2)

a- Vérifier que pour tout réel t ≥ 2 on a : $e^{-t^2} \leq e^{-2t}$.

b- En déduire que pour tout x ≥ 2 on a : $F(x) \leq \frac{1-e^{4-2x}}{2e^4} + \int_0^2 e^{-t^2} dt$.

c- Prouver que pour tout x ≥ 2 on a : $F(x) \leq \frac{1}{2e^4} + \int_0^2 e^{-t^2} dt$ .

d- Montrer que F est majorée sur IR et que F admet une limite finie $L$ en $+\infty$.

**Partie 2.**

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{x}{\cos^2 t}} dt$

1) Montrer que pour tout x ≥ 0 on a : $0 \leq f(x) \leq e^{-x}$ et calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

2) On pose pour tout x∈IR et pour tout $t \in ]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $g(t) = F(x.\tan t)$

a- Montrer que g est dérivable sur I= $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et que $g'(t) = \frac{x}{\cos^2 t} e^{-x^2 \tan^2 t}$

b- En déduire que pour tout x∈IR, on a : $F(x) = x \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x^2 \tan^2 t}}{\cos^2 t} dt$

3) On admet que f est dérivable sur IR et que $f'(x) = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-\frac{x}{\cos^2 t}}}{\cos^2 t} dt$

Montrer que pour tout x∈IR, on a : $[f(x^2)]' = -2e^{-x^2} F(x)$

4) Soit h la fonction définie sur IR par : $h(x) = f(x^2) + [F(x)]^2$

a- Montrer que h est une fonction constante que l'on précisera.

b- En déduire que : $L = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

## Exercice n°4. (2 pts)

Questions indépendantes.

1) Dresser le tableau de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^x}$.

2) Montrer que pour tout nombre premier p>5, on a : $p^4 \equiv 1 (\text{mod} 240)$.

CORRIGE.

**Devoir de Contrôle n°3**

**18-04-2022. (2h)**

**SMAALI.**

## Exercice n°1. (5.5 pts).

Partie 1.

1) a- Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide, deux entiers **a** et **b** tel que : **31a + 13b = 1.**

31=2x13+5 → 5=31-2x13
13=2x5+3 → 3=13-2x5
5=1x3+2 → 2=5-1x3
3=1x2+1 → 1= 3-1x2

1 = 3-1x (5-1x3)=-1x5 + 2x3
=-1x5 + 2x (13-2x5)=2x13 -5x5
=2x13 – 5x (31-2x13) = -5x31 +12x13

$\boxed{1= 31. (-5) + 13. (12)}$

a=-5 et b=12 **0.75**

b- Déduire dans ⟦1, 30⟧, l'inverse de 13 modulo 31.

Comme 1= (-5) x 31 + 13x12 alors 13x12 ≡ 1 [mod31]

Donc $\boxed{\text{12 est l'inverse de 13 modulo 31.}}$ **0.5**

2)

On donne dans ℤxℤ, l'équation (E) : $31x - 13y = 2$.

a- Justifier que (E) admet des solutions dans ℤxℤ.

31^13=1 divise 2 donc $\boxed{\text{(E) admet des solutions dans } \mathbb{Z}\text{x}\mathbb{Z}.}$ **0.25**

b- Montrer que si (x, y) est solution de (E) alors $y \equiv 7[31]$

(x, y) solution de (E) ⇔ 13y = 31x -2 → 13y ≡ -2 [mod31]

Donc y ≡12(-2) [mod31] ≡ -24[mod31] càd $\boxed{y \equiv 7[\text{mod}31]}$ **0.5**

c- En déduire l'ensemble des solutions dans ℤxℤ de l'équation (E).

(x, y) solution de (E) → y ≡ 7[mod31] et donc y=31k+7, k∈ℤ

En remplaçant dans (E) : 31x – 13x31k -7x31 = 2 → 31x = 31x13k + 93

Par suite x =13k + 3

Ainsi (x, y) solution de (E) ⇒ x=13k+3 et y=31k+7, k∈ℤ.

Réciproquement : 31(13k+3) – 13(31k+7) = 31. 3 – 13. 7 =2

$\boxed{S_{\mathbb{Z}x\mathbb{Z}} = \{(13k+3, 31k+7)\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}.}$ **0.75**

d- Quel est le plus petit entier $n_0 \geq 10^4$, solution du système (S) : $\begin{cases} n \equiv 9[13] \\ n \equiv 7[31] \end{cases}$

n=31α+7=13β+9 donc 31α - 13β = 2 càd (α, β) solution de (E)

➔ α=13k+3 et β=31k+7 Alors n=31(13k+3) +7=13(31k+7)+9

➔ n = 403k + 100, or n≥10000 on aura; 403k + 100≥ 10000 Càd k≥ 24,6

➔ $k_0$ = 25 et Donc $\boxed{n_0= 10175}$. **0.5**

## Partie 2.

1) On considère les deux suites arithmétiques U et V définies sur IN par :

$$\begin{cases} \mathbf{U_0 = 2022} \\ \mathbf{U_{n+1} = u_n + 31} \end{cases} \quad \textbf{et} \quad \begin{cases} \mathbf{V_0 = 2024} \\ \mathbf{V_{n+1} = v_n + 13} \end{cases}$$

a- Déterminer l'entier **r**, vérifiant :$2\mathbf{V_r} - \mathbf{U_r} = \mathbf{1}$, et déduire $\mathbf{V_r \wedge U_r}$ .

U et V sont deux suites arithmétiques de raisons respectives 31 et 13.

➔ $U_n$= 31n +2022 et $V_n$= 13n +2024

$2V_r - U_r -1 = 0$ ⇔ 26r + 4048 – 31r – 2022 – 1=0

⇔ -5r + 2025=0 ⇔ $\boxed{r=405}$. **0.5**

Déduction : $2V_r - U_r =1$. Bézout ➔ $\boxed{V_r \wedge U_r = 1}$ **0.25**

b- Déterminer tous les couples **(p, q)** de $[\![803,2023]\!]^2$ tel que : $\mathbf{U_p = V_q}$.

$U_p = V_q$ ⇔ 31p+2022=13q+2024 ⇔ 31p-13q=2 ⇔ (p, q) solution de (E)

⇔ Il existe k∈ℤ tq p=13k+3 et q=31k+7

Or (p, q) $\in [\![803, 2023]\!]^2$

Donc : 803≤13k+3≤2023 et 803≤31k+7≤2023

⇔ 800/13≤k≤2020/13 et 796/31≤k≤2016/31

Càd 61,6 ≤k≤155,4 et 25,7 ≤k≤ 65,1

Alors k ∈{62, 63, 64, 65}

Et par suite $\boxed{(p, q) \in\{(809, 1929) ; (822, 1960) ; (835, 1991) ; (848, 2022)\}}$. **0.75**

2) Dans le plan muni d'un RON$(O, \vec{i}, \vec{j})$, On considère les deux points :

$A(-23, -55)$ et $B(16, 38)$.

Déterminer tous les points M de coordonnées (x, y) entières, situés sur le segment [AB] privé de A et B.

La droite (AB) est d'équation cartésienne : (38+55) x+ (-(16+23)) y +c=0

⇨ (AB) : 93x-39y+c=0 où c∈IR.

Or A∈(AB) ➔93(-23)-39(-55) +c=0➔c=-6

Par suite, M(x, y) ∈(AB) ⇔ 93x-39y-6=0 ⇔ 31x-13y=2

Or x et y sont des entiers alors (x, y) est solution de (E).

⇒ M (13k+3, 31k+7) ; k∈ℤ

Et puisque M est situé sur le segment [AB]\ {A, B}

Alors : x∈]-23, 16[et y∈]-55, 38[

⇨ -23<13k+3<16 et -55<31k+7<38

⇨ -2<k<1

⇨ k ∈{-1, 0} ⇒ il y a deux points $\boxed{M_1 (-10,-24) \text{ et } M_2 (3, 7)}$ **0.75**

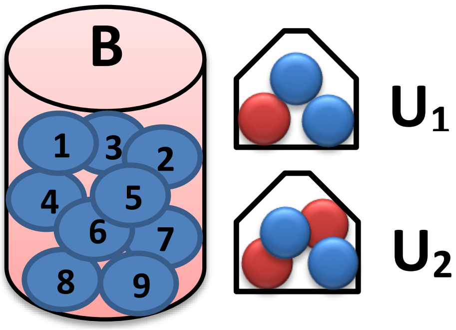
## Exercice n°2. (6 pts).

On dispose d'une boite B et de deux urnes $U_1$ et $U_2$.

B contient neuf jetons numérotés de 1 à 9.

$U_1$ contient une boule rouge et deux boules bleues.

$U_2$ contient deux boules rouges et deux boules bleues.




1) On tire au hasard, successivement et sans remise deux jetons de la boite B. Calculer la probabilité de l'évènement :

**E** : « avoir un seul jeton portant un nombre premier».

$$p(E) = 2.\frac{A_4^1.A_5^1}{A_9^2} = 2.\frac{4.5}{72} = \frac{5}{9}$$ 0.5

2)

**a-** On tire une boule de l'urne $U_1$ et simultanément deux boules de l'urne $U_2$. Calculer la probabilité de chacun des évènements :

**A** : « avoir une boule bleue de $U_1$ et deux boules rouges de $U_2$ »

$$p(A) = \frac{2}{3}.\frac{C_2^2}{C_4^2} = \frac{2}{3}.\frac{1}{6} = \frac{1}{9}$$ 0.5

**B** : « avoir une boule rouge de $U_1$ et deux boules couleurs différentes de $U_2$ »

$$p(B) = \frac{1}{3}.\frac{C_2^1.C_2^1}{C_4^2} = \frac{1}{3}.\frac{2.2}{6} = \frac{2}{9}$$ 0.5

**b-** On tire simultanément deux boules de l'urne $U_1$ et simultanément deux boules de l'urne $U_2$. Calculer la probabilité de chacun des évènements :

**C** : « avoir deux boules bleues de $U_1$ et deux boules rouges de $U_2$ »

$$p(C) = \frac{C_2^2}{C_3^2}.\frac{C_2^2}{C_4^2} = \frac{1}{3}.\frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$ 0.5

**D** : « avoir deux boules de couleurs différentes de chaque urne »

$$p(D) = \frac{C_2^1.C_1^1}{C_3^2}.\frac{C_2^1.C_2^1}{C_4^2} = \frac{2}{3}.\frac{4}{6} = \frac{4}{9}$$ 0.5

3) On considère l'épreuve (E) suivante :

On tire au hasard, successivement et sans remise deux jetons de la boite B.

* Si un seul des deux jetons tirés porte un nombre premier, on tire une seule boule de l'urne $U_1$ et simultanément deux boules de l'urne $U_2$.

*  Si NON, on tire simultanément deux boules de l'urne $U_1$ et simultanément deux boules de l'urne $U_2$.

Soit l'évènement **S** : « Obtenir à l'issue de l'épreuve (E) exactement deux boules rouges ».

**a-** On a eu un seul jeton portant un nombre premier de la boite B, calculer la probabilité d'obtenir deux boules rouges à l'issue de l'épreuve (E).

$p\ (S|E) = p\ (A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{1}{3}.$

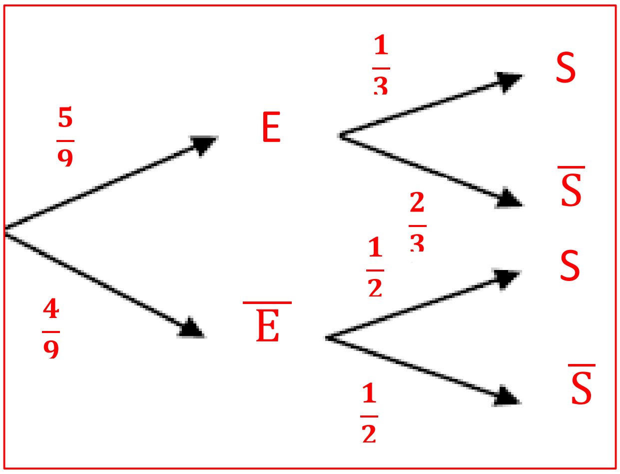
Car A et B sont incompatibles ($A \cap B = \emptyset$). 0.5

**b-** On n'a pas eu un seul jeton portant un nombre premier de la boite B, calculer la probabilité d'obtenir deux boules rouges à l'issue de l'épreuve (E).

$p\ (S|\overline{E}) = p\ (C \cup D) = p(C) + p(D) = \frac{1}{2}.$

Car C et D sont incompatibles ($C \cap D = \emptyset$). 0.5

**c-** Construire un arbre de probabilités résumant la situation.




0.5

**d-** Déduire que $\mathbf{p(S) = \frac{11}{27}}$

$p(S) = p(S|E).p(E) + p(S|\overline{E}).p(\overline{E}) = \frac{5}{9}.\frac{1}{3} + \frac{4}{9}.\frac{1}{2} = \frac{11}{27}$ 0.5

**4)** Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On répète l'épreuve (E), **n** fois de suite en remettant à chaque fois les jetons tiré dans la boite B et les boules tirées dans leurs urnes d'origine.

Soit **X** la variable aléatoire donnant le nombre de fois où l'évènement **S** est réalisé.

**a-** Déterminer la loi de probabilité de X, dans le cas où n=3.

Il y a répétition de (E) 3 fois de suite,

De manières identiques et indépendantes

⇨ X suit la loi binomiale de paramètre n=3 et p=p(Succès)=11/27.

⇨ $p(X = k) = C_3^k \left(\frac{11}{27}\right)^k \left(\frac{16}{27}\right)^{3-k}$ , $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ 0.75

**b-** De combien de fois <u>au minimum</u> faut-il répéter l'épreuve (E), pour avoir la probabilité $\mathbf{p_n}$ que S soit réalisé au moins une fois, est supérieure à 0,999?

$X \sim \mathscr{B}(n, 11/27)$

$$p(X = k) = C_n^k \left(\frac{11}{27}\right)^k \left(\frac{16}{27}\right)^{n-k} \quad , k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

$$p_n = p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \left(\frac{16}{27}\right)^n$$

$$p_n \geq 0.9999 \leftrightarrow \left(\frac{16}{27}\right)^n \leq 0.0001 \leftrightarrow n \geq \frac{-4\ln(10)}{\ln(16) - \ln(27)} \approx 17.6$$

Pour que $p_n$ soit supérieur à 0.9999 il faut répéter (E) au moins 18 fois. 0.75

## Exercice n°3. (6,5 pts)

On considère la fonction F définie par : $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$

### Partie 1.

1)

**a-** Justifier que F est définie sur IR.

$t \to e^{-t^2}$ est continue sur IR. 0.25

$0 \in IR$ donc $x \in IR$ ➔ $\boxed{D_F = IR}$

**b-** Etudier le sens de variation de F sur IR.

$t \to e^{-t^2}$ continue sur IR donc F est dérivable sur IR et $F'(x) = e^{-x^2} > 0$ 0.5

⇨ $\boxed{\text{F est strictement croissante sur IR}}$.

**c-** Montrer que F est impaire.

$$F(-x) = \int_0^{-x} e^{-t^2} dt = -\int_{-x}^{0} e^{-t^2} dt = -\int_0^x e^{-t^2} dt = -F(x) : \boxed{\text{F est impaire}}$$

Car $t \to e^{-t^2}$ est paire 0.5

2)

**a-** Vérifier que pour tout réel $t \geq 2$ on a : $e^{-t^2} \leq e^{-2t}$.

$t \geq 2 \Rightarrow t^2 \geq 2t \Leftrightarrow -t^2 \leq -2t \Leftrightarrow e^{-t^2} \leq e^{-2t}$ 0.25

**b-** En déduire que pour tout $x \geq 2$ on a : $F(x) \leq \frac{1-e^{4-2x}}{2e^4} + \int_0^2 e^{-t^2} dt$.

Pour $x \geq 2$ on aura : $\int_2^x e^{-t^2} dt \leq \int_2^x e^{-2t} \, dt$

Donc $\int_2^x e^{-t^2} dt + \int_0^2 e^{-t^2} dt \leq \int_2^x e^{-2t} \, dt + \int_0^2 e^{-t^2} dt$

⇨ $\int_0^x e^{-t^2} dt \leq \left[-\frac{1}{2} e^{-2t} dt\right]_0^x + \int_0^2 e^{-t^2} dt$

⇨ $F(x) \leq \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2}\right) + \int_0^2 e^{-t^2} dt \rightarrow \boxed{F(x) \leq \frac{1-e^{4-2x}}{2e^4} + \int_0^2 e^{-t^2} dt}$ 0.75

c- Prouver que pour tout $x \geq 2$ on a : $F(x) \leq \frac{1}{2e^4} + \int_0^2 e^{-t^2} dt$ .

On a: $F(x) \leq \frac{1-e^{4-2x}}{2e^4} + \int_0^2 e^{-t^2} dt \rightarrow \boxed{F(x) \leq \frac{1}{2e^4} + \int_0^2 e^{-t^2} dt}$ 0.25

d- Montrer que F est majorée sur IR et que F admet une limite finie L en $+\infty$.

Pour x≥2 ; $F(x) \leq \frac{1}{2e^4} + \int_0^2 e^{-t^2} dt \in IR$.

Pour x≤2 ; $F(x) \leq F(2) = \int_0^2 e^{-t^2} dt \in IR$ Car F est croissante sur IR.

Par suite $\boxed{\text{F est majorée}}$.

En plus F est croissante, alors $\boxed{\text{elle admet une limite finie L en } +\infty}$. 0.5

## Partie 2.

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{x}{\cos^2 t}} dt$

1) Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a : $0 \leq f(x) \leq e^{-x}$ et calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Pour $0 \leq t \leq \pi/4$ on a $0 \leq \cos^2 t \leq 1 \Rightarrow 1/\cos^2 t \geq 1 \Rightarrow -x/\cos^2 t \leq -x$ car $-x \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq e^{-x}$

En plus $f(x) \geq 0$ d'où $\boxed{0 \leq f(x) \leq e^{-x}}$

<u>Déduction</u> : comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ alors $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$. 0.5

2) On pose pour tout x∈IR et pour tout $t \in ]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $g(t) = F(x.\tan t)$

a- Montrer que g est dérivable sur I= $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et que $g'(t) = \frac{x}{\cos^2 t} e^{-x^2 \tan^2 t}$

- $u : t \rightarrow x.\tan t$ dérivable sur I à valeurs dans u(I)=IR
  F : $t \rightarrow F(t)$ dérivable sur IR
  Donc Fou= $\boxed{\text{g dérivable sur I}}$ 0.5
- $g'(t) = u'(t).F'(u(t)) = x(1+\tan^2 t).e^{-(x \tan t)^2} \Rightarrow \boxed{g'(t) = \frac{x}{\cos^2 t} e^{-x^2 \tan^2 t}}$

b- En déduire que pour tout x∈IR, on a : $F(x) = x \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x^2 \tan^2 t}}{\cos^2 t} dt$

On a $g'(x) = \frac{x}{\cos^2 t} e^{-x^2 \tan^2 t}$ donc $\int_0^{\frac{\pi}{4}} g'(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 t} e^{-x^2 \tan^2 t} dt$

$\Rightarrow g\left(\frac{\pi}{4}\right) - g(0) = x. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x^2 \tan^2 t}}{\cos^2 t} dt$

$F(x) - F(0) = \boxed{F(x) = x. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x^2 \tan^2 t}}{\cos^2 t} dt}$ 0.5

3) On admet que f est dérivable sur IR et que $f'(x) = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-\frac{x}{\cos^2 t}}}{\cos^2 t} dt$

Montrer que pour tout x∈IR, on a : $[f(x^2)]' = -2e^{-x^2} F(x)$

$$[f(x^2)]' = 2x.f'(x^2) = 2x.\left(-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x^2(1+\tan^2 t)}}{\cos^2 t} dt = -2x. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x^2 - x^2 \tan^2 t}}{\cos^2 t} dt\right.$$

$$= -2x. \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x^2}. \frac{e^{-x^2(\tan^2 t)}}{\cos^2 t} dt = -2x\, e^{-x^2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x^2(\tan^2 t)}}{\cos^2 t} dt = \boxed{-2e^{-x^2} F(x)}$$ 0.5

4) Soit h la fonction définie sur IR par : $h(x) = f(x^2) + [F(x)]^2$

a- Montrer que h est une fonction constante que l'on précisera.

h dérivable sur IR et $h'(x)=[f(x^2)]'+[F^2(x)]'=-2e^{-x^2}F(x)+2e^{-x^2}F(x)=0$

⇨ h(x)=cste. Or $h(0)=f(0)+F(0)=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^0 dt + 0 = \frac{\pi}{4}$ ➔ $\boxed{h(x)=\pi/4}$ 0.5

b- En déduire que : $L = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

On a: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x^2) = 0$ et on a: $\lim_{x\to+\infty} F(x) = L$

Donc $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x^2) + \lim_{x\to+\infty} F^2(x)$ càd. $\frac{\pi}{4} = 0 + L^2 \to \boxed{L = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$ 0.5

## Exercice n°4. (2 pts)

<u>Questions indépendantes.</u>

1) Dresser le tableau de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^x}$

- $u: x \to (1/3)^x$ dérivable sur IR, à valeurs dans $]0,+\infty[$
  et on a $u'(x)=\ln(1/3).(1/3)^x$.
  $v: x \to \sqrt[3]{x}$ dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a $v'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
  donc $\boxed{v\circ u = f \text{ est dérivable sur IR}}$
- et on a : $f'(x)=u'(x).v'(u(x))$
  $f'(x) = \ln\left(\frac{1}{3}\right).\left(\frac{1}{3}\right)^x.\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\left(\frac{1}{3}\right)^x\right)^2}} \to \boxed{f'(x) = -\frac{\ln 3}{3}.\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^x} < 0}$
  ➔ f est strictement décroissante sur IR.
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^x} \boxed{= 0}$ Car $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0 \text{ car } 0 < \frac{1}{3} < 1 \\ \text{et } \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x} = 0 \end{cases}$
  $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^x} \boxed{= +\infty}$ Car $\begin{cases} \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = +\infty \text{ car } 0 < \frac{1}{3} < 1 \\ \text{et } \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty \end{cases}$
- D'où le tableau de variation de f :

| x | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | ------------ | |
| f | $+\infty$ ↘ | 0 |

01

2) Montrer que pour tout nombre premier p>5, on a : $p^4 \equiv 1(\mathrm{mod}\,240)$

240=15x16=5x3x16

- On a : 5 premier, p premier et p>5 donc $p\wedge 5=1$ ➔ $\boxed{p^4\equiv 1[5]}$ (th. Fermat)
- 3premier

| Reste modulo3 de p | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| Reste modulo3 de $p^4$ | 0 | 1 | 1 |

p premier ➔ $p\equiv 1[3]$ ou $p\equiv 2[3]$ ➔ $\boxed{p^4\equiv 1[3]}$

- p premier donc p impair ➔ $p=2k+1,\ k\in\mathbb{Z}$

Donc $p^4-1=(p^2+1)(p+1)(p-1)=(4k^2+4k+2)(2k+2)(2k)$

$=2(2k^2+2k+1).2(k+1).2(k)=8(2k^2+2k+1)(k+1)(k)$

Or $(k+1)(k)$est pair sig $(k+1)(k)=2q, q\in\mathbb{Z}$

Par suite $p^4-1=16.(2k^2+2k+1)q \rightarrow \boxed{p^4\equiv 1[16]}$

- $$\begin{cases}\begin{cases}p^4-1\equiv 0[3]\\ p^4-1\equiv 0[5]\\ 3\wedge 5=1\end{cases} \rightarrow p^4-1\equiv 0[15]\\ \text{et}\quad p^4-1\equiv 0[16]\\ \text{avec}\ \ 15\wedge 16=1\end{cases} \Rightarrow \boxed{p^4-1\equiv 0[240]}$$

01