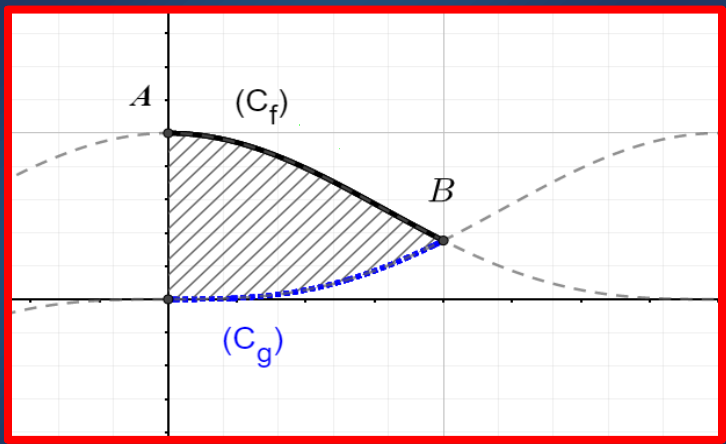
Devoir de contrôle n°2
04-02-2022. (2h)
SMAALI.

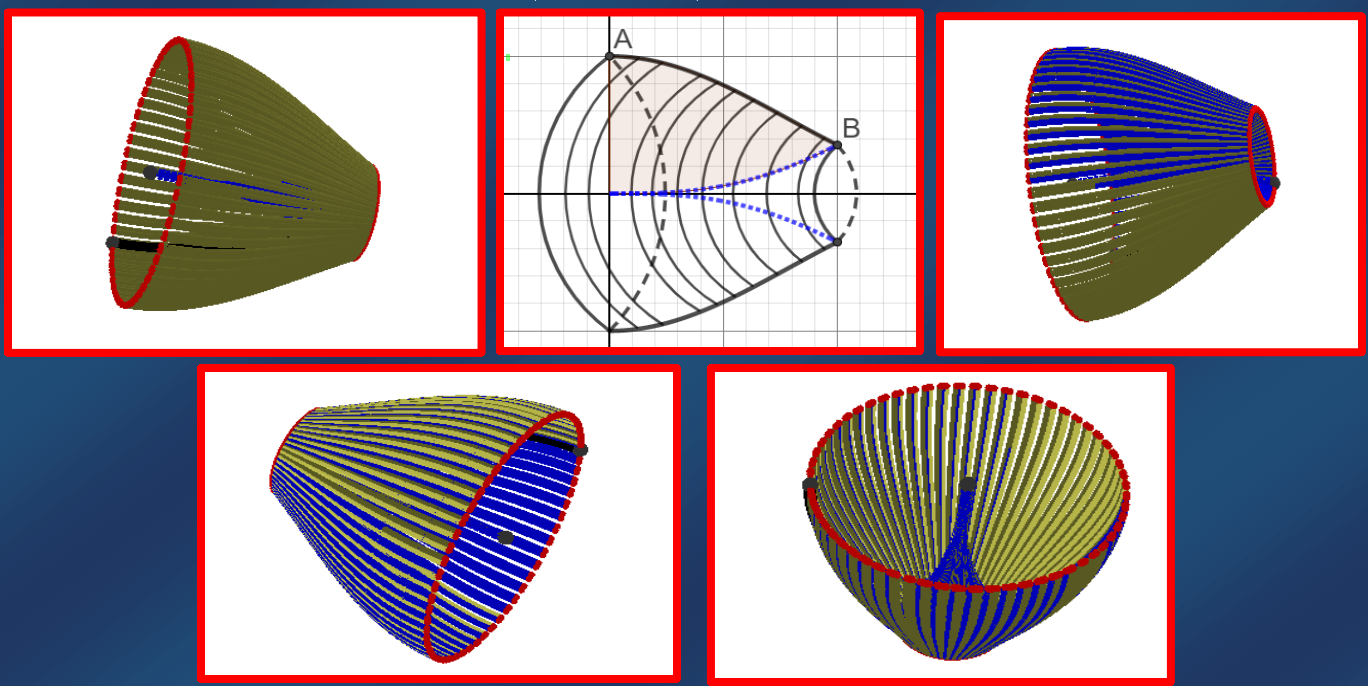
EXERCICE N°1. (Questions indépendantes) (4.5 pts)

1) On donne ci-dessous les portions des courbes de deux fonctions définies sur IR par : $f(x)=\cos^3 x$ et $g(x)=\sin^3 x$,

- Déterminer les coordonnées des points A et B.
- Déterminer (en u. a.) l'aire de la région Hachurée.



2) On donne ici des différentes positions du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses, de la région hachurée de la question **1)**.
Déterminer le volume (en u. v.) de ce solide.



3) Déterminer la valeur moyenne de $h(x) = \dfrac{1}{1+\sin(2x)}$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.

4) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{x^2} \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+t^2}}\,dt = 0$

EXERCICE N°2. (7 pts)

Pour tout entier naturel $n \neq 0$, on considère la suite d'intégrales définie par : $\boxed{I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx}$

A.

1)

a. Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $I_n \geq 0$

b. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

2)

a. Calculer I_2

b. Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$

3)

a. Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

b. En déduire la limite de (I_n)

B.

Pour tout $n \in IN^*$, on pose : $\boldsymbol{\varphi(n) = I_{n+4} - I_n}$

1) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $\varphi(n) = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1}$

2) Soit la suite U donnée par :

$$\boxed{u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots - \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+1}}$$

a. Pour $n \in IN^*$, montrer que :

$$\sum_{p=0}^{n-1} \varphi(4p+2) = I_{4n+2} - I_2$$

b. Pour $n \in IN^*$, montrer que :

$$\sum_{p=0}^{n-1} \varphi(4p+2) = u_n - 1$$

c. En déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{\pi}{4}$

EXERCICE N°3. **(8,5 pts)**

Soit ABC un triangle rectangle en A de sens direct tel que: AB=2AC.
I le milieu de [AB] et Δ la droite perpendiculaire à (AB) en B.
(C) et (C') les cercles de diamètres [AC] et [AB] respectivement.

A.

1) Soit f la similitude directe qui transforme A en B et C en A
   a. Déterminer le rapport et l'angle de f.
   b. Soit Ω le centre de f.
      - Montrer que : Ω appartient aux cercles (C) et (C')
      - construire alors Ω.

2)
   a. Montrer que : fof est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
   b. En déduire que Ω est le projeté orthogonale de A sur la droite (BC).

3)
   a. Déterminer l'image de (AC) par f
   b. La droite (Δ) coupe la droite (AΩ) en B'.
      - Montrer que f ((AB)) = Δ.
      - En déduire que : f(B) = B'

B.

1) Soit g la similitude indirecte qui transforme A en B et C en A
   a. Montrer que g admet un seul point invariant.
   b. Soit W le centre de g et (D) son axe.
      - Montrer que gog est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
      - Déduire que : $\overrightarrow{WB} = 4.\overrightarrow{WC}$
      - Construire W.
   c. Soit E= $h_{(W,\ 2)}$ (C).
      - Montrer que (D) = med [AE].
      - construire (D).

2) On munit le plan du repère orthonormé direct $(A,\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AC})$.
   Soit S la transformation du plan qui à tout point M(z) on lui associe le point M'(z') tel que : $z' = -2i\,\overline{z} + 2$
   a. Déterminer les affixes des points invariants par S.
   b. Montrer que S = g.
   c. Donner une équation cartésienne de la droite (D).

Nom & Prénom…………………………………………N°………