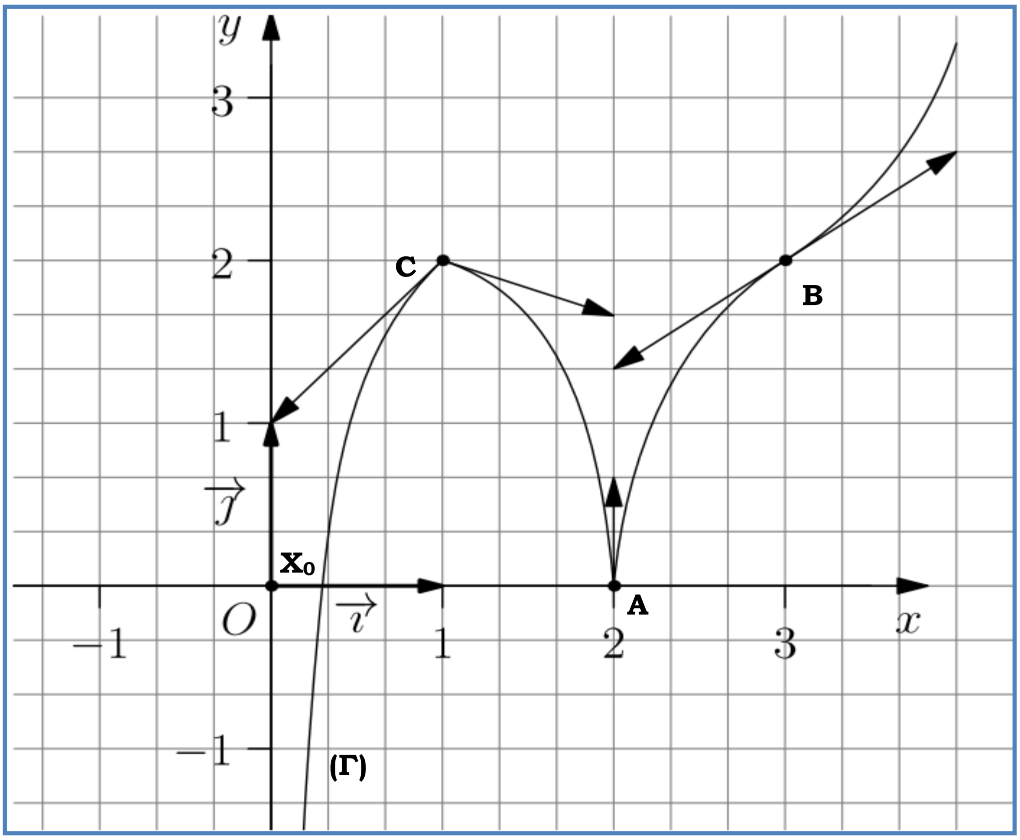
EXERCICE n°1 :



La courbe Γ ci-dessus représente une fonction f définie et continue sur$]0, +\infty[$.
(Γ) coupe l'axe (Ox) aux deux points d'abscisses 2 et x_0.
(Γ) admet au point A (2, 0) une demi- tangente verticale.
(Γ) admet au point C (1, 2) deux demi- tangentes.
Le point B (3, 2) est un point d'inflexion de (Γ).
(Γ) admet une branche parabolique de direction verticale au voisinage de $+\infty$.
(Γ) admet une asymptote verticale d'équation : x = 0.

1. En se référant au graphique et aux données fournies, Déterminer :

a. $f(3)$ $\qquad$ $f'(3)$ $\qquad$ $f''(3)$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{f(x)}{x-2}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-2}{x-1}$

c. $\lim\limits_{x\to0^+} f\left(\frac{\sin x+\tan 2x}{3x}\right)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{1-\cos(f(x))}{(x-2)^2}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(3x)}{x-1}$

2. soit la fonction **g**, définie continue et dérivable sur IR, dont son tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	3	$+$	
g	$-\infty$		0		3		$+\infty$

a. Montrer qu'il existe un unique réel α vérifiant $g(\alpha)=1$, et que $0 < \alpha < 2$.

b. On suppose que **g'** est continue et strictement croissante sur [0, 2].
Montrer que pour tout $0 \leq x \leq \alpha$, on a : $3x-3\alpha+1 \leq g(x) \leq 1$.

3. On pose $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{g}\ (\mathbf{3}\ \mathbf{f}'(\mathbf{x})\ )}$

a. Déterminer D_h l'ensemble de définition de h.

b. Montrer que h est dérivable en **3**, et déterminer **h'(3)**.

EXERCICE n°2 :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $3Z\,(Z-1)-(1+i)Z^3=-1$

1. Soit ω une solution de (E).

a. Montrer que l'équation (E) est équivalente à (E') : $(1-Z)^3 - i\,Z^3 = 0$

b. Montrer que : $|\omega| = |1-\omega|$ et Déduire que : $\omega + \overline{\omega} = 1$

2. On pose $\omega = r\,e^{i\theta}$ avec $r > 0$ $et -\pi < \theta < \pi$.

a. Montrer que : $r = \dfrac{1}{2\ \cos\theta}$ et Déduire que $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

b. Montrer que : $r^3\,e^{-i3\theta} = i\,r^3\,e^{i3\theta}$ et Déduire les valeurs possibles de θ.

3.

a. Donner une factorisation de $(1-Z)^3 - i\,Z^3$

b. Déduire que : (E) ⇔ $Z = \frac{1+i}{2}$ ou $z^2 + (2i-1)Z - i = 0$.

c. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 + (2i-1)Z - i = 0$

d. Déduire la valeur exacte de $\tan\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

EXERCICE n°3 :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé$(O,\vec{u},\vec{v})$, On considère les points A et J d'affixes respectifs 1 et i.

1. Soit r l'application du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe **Z' = i Z**

a. Caractériser l'application r

b. Déterminer l'affixe du point D dont son image par r est le point C d'affixe $\mathbf{c} = \frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}$

2. Pour tout nombre complexe m ≠ -i, on désigne par M, N et P d'affixes respectifs m, $\mathrm{n} = \mathrm{im}$ et $\mathrm{p} = -\mathrm{m}^2$

a. Vérifier que pour tout m ≠ -i, on a : $\frac{\mathrm{p}-1}{\mathrm{n}-1} = \mathrm{i}(\mathrm{m}-\mathrm{i})$

b. Déduire que : $\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AN}} = \mathrm{MJ}$ et que: $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AN}},\overrightarrow{\mathrm{AP}}}) \equiv \frac{\pi}{2} + (\widehat{\vec{\mathrm{u}},\overrightarrow{\mathrm{JM}}})[2\pi]$

3.

a. Déterminer l'ensemble des points M(m) du plan tel que :
Les points A, N et P sont alignés.

b. Déterminer l'ensemble des points M(m) du plan tel que :
Le triangle ANP est rectangle en A.

4. Sur l'annexe (**<u>feuille à rendre</u>**), on a placé un point M sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre J et de rayon ½ et on pose θ une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{\mathrm{u}},\overrightarrow{\mathrm{JM}}})$

a. Vérifier que : N = r(M)

b. Justifier que : AP = ½ AN et que : $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AN}},\overrightarrow{\mathrm{AP}}}) \equiv \theta + \frac{\pi}{2}[2\pi]$

c. Construire alors les points N et P.

Annexe