E 1

Dans le plan orienté on considère le triangle ABC inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O telle que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Soit M le projeté orthogonal de B sur (AC) et N le projeté orthogonal de C sur (AB).

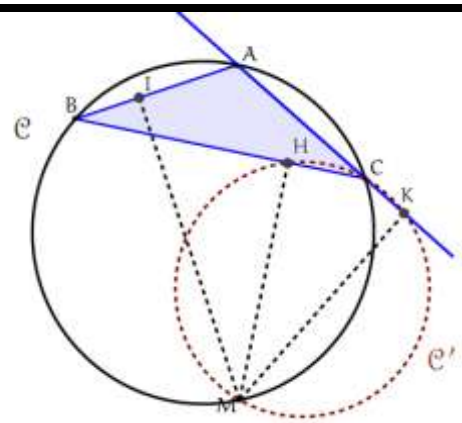
1. Montrer que B,C ,M et N sont situés sur le même cercle.
2. En déduire que $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)[\pi]$.
3. Soit [AT) la tangente à $\mathcal{C}$ en A. Montrer que (OA) ⊥ (MN).
4. Soit $\Gamma=\left\{M\in\mathcal{P}\text{ tel que }\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]\right\}$.
   a) Vérifier que $O\in\Gamma$.
   b) Déterminer et construire Γ.

E 2

Soit ABC un triangle isocèle de sommet principale A tel que : $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)\equiv\frac{5\pi}{12}[2\pi]$.

1. Déterminer la mesure principale de $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.
2. Soit D un point du plan tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\equiv-\frac{65\pi}{6}[2\pi]$ et $AD=AB$
   a) Déterminer la mesure principale de $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$.
   b) En déduire que A est le milieu du segment [CD].
3. a) Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}\right)$.
   b) En déduire que le triangle BCD est rectangle en B.
4. Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle BCD.
   a) Justifier que $\mathcal{C}$ est de centre A.
   b) Soit E un point de $\mathcal{C}$ tel que $E\in\overset{\frown}{DB}\setminus\{B,D\}$.
   Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{ED}\right)$.
5. Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$.
6. Calculer en fonction de AB, $dét\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right)$

E 3



Le plan est orientée dans le sens direct.

Dans la figure ci contre ABC est un triangle isocèle de sommet principale A tel que $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$ et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit.

1. Déterminer la mesure principale de l'angle orientée $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

2. Soit M un point de l'arc orienté $\overset{\frown}{BC}$, distincts de B et C.

   Soit I , H et K les projetés orthogonaux de M respectivement sur (AB), (BC) et (AC).

   a) Montrer que les points H, K, C et M appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}'$ que l'on précisera.

   b) Montrer que $\left(\overrightarrow{KH},\overrightarrow{KM}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right)[2\pi]$.

   c) Montrer que $\left(\overrightarrow{KM},\overrightarrow{KI}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)[2\pi]$. En déduire que les points I, H et K sont alignés.

3. Soit $\Gamma=\left\{M\in\mathcal{P}\text{ tel que }\left(\overrightarrow{NB},\overrightarrow{NC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]\right\}$.

   Soit D le symétrique de C par rapport à A.

   a) Montrer que D appartient à Γ.

   b) Déterminer et construire alors l'ensemble Γ.

   c) Montrer que le point M′ symétrique de M par rapport à (BC) appartient à Γ.