4° T2

MARS 2019

Devoir de Maison 2

LA²K. SMAALi.

Premier Exercice :

I. soit g la fonction définie sur IR par : $g(x)=(3-x)e^x-3$

1) étudier les variations de g.

2) montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans IR, deux solutions, l'une est 0 et l'autre α, telque $2{,}82<\alpha<2{,}83$

3) déduire le signe de $g(x)$, suivant les valeurs de x.

II. On considère sur IR, la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3}{e^x-1} \ ; \ x\neq 0 \\ f(0)=0 . \end{cases}$$

et $(\mathcal{C}_f)$ sa représentation graphique dans un RON $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) montrer que f est dérivable en 0, et donner une équation de T la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ en O.

2) a) montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3e^{-x}=0$

puis Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) montrer que : pour tout réel $x\neq 0$, on a

$$f'(x)=\frac{x^2 \cdot g(x)}{(e^x-1)^2}.$$

c) Vérifier que : $f(\alpha)=\alpha^2(3-\alpha)$ et l'encadrer.

d) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Calculer $f(x)+x^3$

b) Déduire la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et (Γ) où (Γ) est la courbe de la fonction $x\longmapsto -x^3$.

c) montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x^3)=0$ et l'interpréter.

4) Tracer, dans un même repère, la tangente T et les deux courbes (Γ) et $(\mathcal{C}_f)$.

Deuxième Exercice :

I. Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x - 1 - 2\ln x$.
et $(\mathscr{C}_g)$ sa courbe dans un RON$(O,\vec{i},\vec{j})$. (unité : 4 cm).

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et interpréter.

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$

3) Étudier les variations de g.

4) mq l'équation $g(x)=0$ admet dans $]0,+\infty[$, deux solutions, l'une 1 et l'autre α tel que : $3{,}5 < \alpha < 3{,}6$.

5) Déduire le signe de $g(x)$, puis le signe de $g\left(\frac{1}{x}\right)$.

II. On définit sur $[0,+\infty[$, la fonction f par

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 + x + x^2 \cdot \ln x \quad ; \; x > 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter.

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter.

3) mq pour tout $x>0$ on a : $f'(x) = x \cdot g\left(\frac{1}{x}\right)$

4) Dresser le tableau de variation de f.

5) mq $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\alpha - 1}{2\alpha^2}$ et l'encadrer.

6) Représenter la courbe $(\mathscr{C}_f)$ de f sur $[0;3]$.

Troisième Exercice : (V-F en justifiant).

l'espace est muni d'un RON $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soient les pts $A(1,3,0)$; $B(-1,1,-1)$; $C(3,4,0)$, $D(1,1,1)$ et le plan $P: x-2y+2z+5=0$.

1°) $(AB) \subset P$. 2°) $C \in (AB)$. 3°) $D \in P$.

4°) le plan médiateur de $[AC]$ est d'éq° $4x+2y-15=0$

5°) P est tangent au sphère $S\left(D, \frac{6}{\sqrt{3}}\right)$.

Quatrième Exercice :

Dans l'espace $\mathcal{E}$ rapporté à un RON $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(1,0,0)$, $B(1,-1,0)$
$C(1+\cos\theta, -1, \sin\theta)$ et $D(0,-1,0)$

1) Mq : ABC est un triangle rectangle en B.

2) Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de $\mathcal{E}$ vérifiant : $x^2+y^2+z^2-2x+2y+1=0$.

a) mq : (S) est la sphère de centre B et de rayon 1.

b) Vérifier que : C et D sont deux points de (S).

c) Pour quelles valeurs de θ ; $[CD]$ est un diamètre de (S).

3) Soit Q le plan d'éq° $X-Y+Z-1=0$.

a) Mq : (AD) est incluse dans Q.

b) Mq : (S) et Q sont sécantes, et Déterminer leur intersection.

4) Soit les plans P_θ : $\cos\theta \cdot X + \sin\theta \cdot Z - (1+\cos\theta) = 0$

a) Mq : $(AB) \parallel P_\theta$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$.

b) Mq : P_θ et (S) sont tangents en C.

Cinquième Exercice :

L'espace est muni d'un RON $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit le réel $\alpha \in]0, \pi[$, et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.
On considère (S_α) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ vérifiant : $OM^2 - 2\cos\alpha \cdot (\vec{OM}\cdot\vec{u}) + 3 - 4\sin^2\alpha = 0$

1) a) Donner une équation cartésienne de (S_α).

b) Montrer que (S_α) est une sphère.

Préciser son centre I_α et son rayon R_α.

c) Quel est l'ensemble des points I_α, lorsque α varie dans $]0,\pi[$.

2) a) Déterminer toutes les sphères (S_α) qui passent par O.

b) Montrer que O est le milieu du segment $[I_\alpha I_{\pi-\alpha}]$.

c) Déduire que (S_α) et $(S_{\pi-\alpha})$ sont symétriques par rapport à O.

3) Soit P le plan d'éq° : $x+y+z=0$.

a) Déterminer les coordonnées du point H.

où H est le projeté orthogonal de I_α sur P.

b) Étudier l'intersection de P et (S_α).

BON TRAVAIL.