



2019/2020

3[°]M

SMAALI.

DEVOIR DE MAISON 2 (à rendre le 28-02-2020
sur double feuille)

Liste.

48

**Ex
1.**Soit le nombre complexe $a = \frac{-2}{1+i\sqrt{3}}$

- 1) a) Ecrire a sous forme algébrique.
b) Montrer que $a^2 = \bar{a}$ et que $1 + a + a^2 = 0$.
c) Ecrire a sous forme trigonométrique.
- 2) a) vérifier que $z^2 - 2\sqrt{2}z = (z - \sqrt{2})^2 - 2$
b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$.
- 3) Soit $b = 1 - i$
a) Ecrire b sous forme trigonométrique.
b) En déduire la forme trigonométrique du nombre complexe $c = \frac{\bar{a}}{b^3}$.
c) Déterminer alors les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.
- 4) Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soient les points A, B et M d'affixes respectives a, b et z , ($z \in \mathbb{C}$)
a) Placer les points A et B dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
b) Déterminer et construire chacun des ensembles suivants : $E = \{M \in P, |iz - i - 1| = |a - b|\}$,
$$F = \{M \in P, |\bar{z} - i - 1| = \left|z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right|\}.$$

**Ex
2.**

- 1) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^* \sum_{k=1}^n 2k - 1 = n^2$.
- 2) Montrer que pour tout entier naturel n : $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$.
- 3) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$: $\begin{cases} a+b=168 \\ a \wedge b=12 \end{cases}$
- 4) Soit dans $\mathbb{N}^2$ l'équation (E) : $4x - 7y = 6$.
a/ Vérifier que $(5; 2)$ est une solution de (E).
b/ En déduire la résolution de (E) dans $\mathbb{N}^2$.

Ex 3.

I) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x^2 + x + 2}{x^2 + 1}$. On désigne par (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Vérifier que pour tout réel x , $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

Dresser alors le tableau de variation de f .

b) Soient α et β deux réels de $] \frac{\pi}{2}, \pi [$ avec $\alpha < \beta$.

Comparer $f(\cos \alpha)$ et $f(\cos \beta)$.

2) a) Montrer que $I(0,2)$ est un centre de symétrie de (C_f) .

b) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C_f) au point I .

c) Etudier la position relative de (C_f) et (T) .

3) Tracer (C_f) et (T) .

4) Soit $\theta \in [0, 2\pi[$.

Déterminer graphiquement et suivant les valeurs du réel m le nombre de solutions de

l'équation $(E_m) : \frac{\cos \theta}{1 + \cos^2 \theta} = m$.

II) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x^2 - 2x + 4} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1) a) Etudier la dérivabilité de g en 0.

b) Montrer que la droite $D : y = x - 1$ est une asymptote oblique à (C_g) au voisinage de $(+\infty)$.

2) Dresser le tableau de variation de g

3) Tracer (C_g) dans le même repère. (On tracera les demi-tangentes à (C_g) au point I .)

Ex 4.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\cos x}{\cos 2x}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que le point $A(\frac{\pi}{2}, 0)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}$.

2) Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition et que :

$$f'(x) = \frac{\sin x (1 + 2 \cos^2 x)}{\cos^2(2x)}.$$

3) Montrer qu'il suffit d'étudier f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cap D_f$.

4) Etudier f et tracer la partie de $\mathcal{C}$ dans $[-\pi, \pi]$.

5) Déterminer les équations des tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'ordonnées 1.

Ex 5.	Le plan étant orienté dans le sens direct. ABC est un triangle isocèle ,rectangle en A et de sens direct . Soit D un point du segment [BC] tel que $BD = AB$. 1)a) Montrer qu'il existe une unique rotation R qui transforme A en B et B en D. b) Déterminer une mesure de son angle et construire son centre I . 2) Soit $f = RoR$ a) Donner les éléments caractéristiques de f. b) Déterminer $f(A)$ et déduire la nature du triangle AID. 3) Soit $D' = R(D)$ a) Déterminer $f(B)$. Construire alors le point D'. b) Déterminer l'image de la droite (AB) par f c) Prouver que ACDD' est un parallélogramme. 4) a) Montrer que les points A ,B , D et D' sont situés sur un même cercle ζ à déterminer. b) Vérifier que le cercle ζ est globalement invariant par f . 5) Soient Γ_A et Γ_B les cercles de centres respectifs A et B et passant par le point I; les cercles Γ_A et Γ_B se recoupent en un point J. Soit $M \in \Gamma_A \setminus \{I, J\}$ et soit $M' = R(M)$ a) Montrer que les points M , J et M' sont alignés. b) Soit $J' = R(J)$. Montrer que la droite (JJ') est tangente au cercle Γ_A
-----------------------------------	--