Bac Blanc 2019	**DEVOIR SYNTHESE 3.** 4°Sciences Techniques.	Le : 18-05-2019 (3 h).
LHBD	**LYCÉE HABIB BOURGUIBA-DAHMANI** **MR: WEILI. ADEL.**	4°T1.
LA²K	**LYCÉE AHMED AMARA- KEF** **MR: SMAALI. MONDHER.**	4°T2.

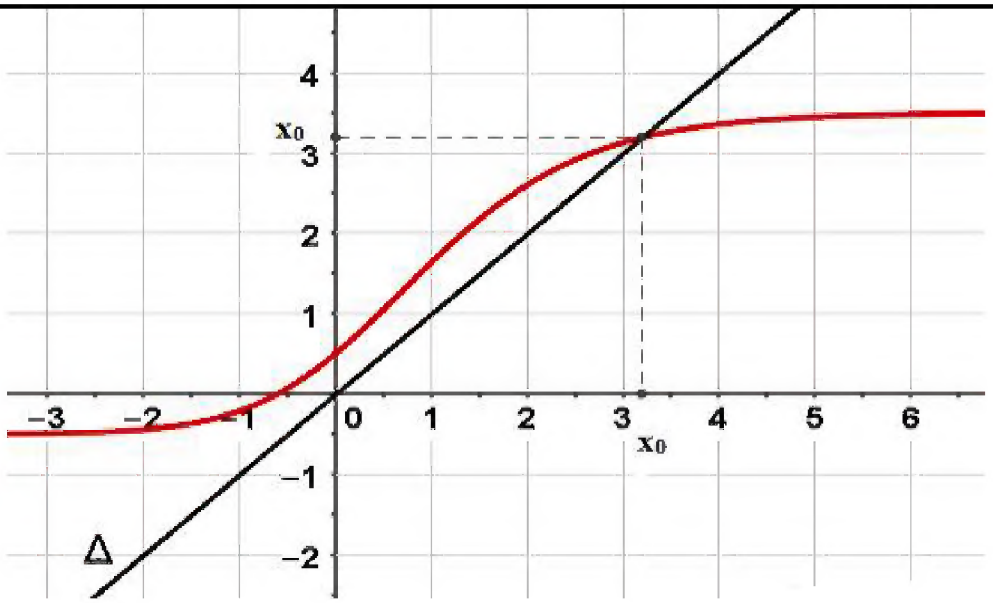
N.B :

Le sujet comporte 4 pages et 1 annexe à rendre avec votre copie.

Tenez bien à la clarté des rédactions et la propreté des copies.

L'utilisation des portables est interdite. Calculatrices sont autorisées.

Ex



La courbe Γ ci-dessus est la représentation graphique, dans un repère orthonormé (O, i, j), d'une fonction f définie et continue sur IR.
Δ est la droite d'équation: y=x.
Γ et Δ sont sécantes en un seul point de coordonnée (x_0, x_0).

On considère la suite U définie sur IN par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad n \in IN \end{cases}$

1) montrer par récurrence que : $0 \leq u_n \leq x_0$, pour tout n∈IN.
2) dresser le tableau de signes de **f(x)-x**.
3) montrer que la suite U est croissante.
4) déduire que U est convergente et déterminer sa limite.

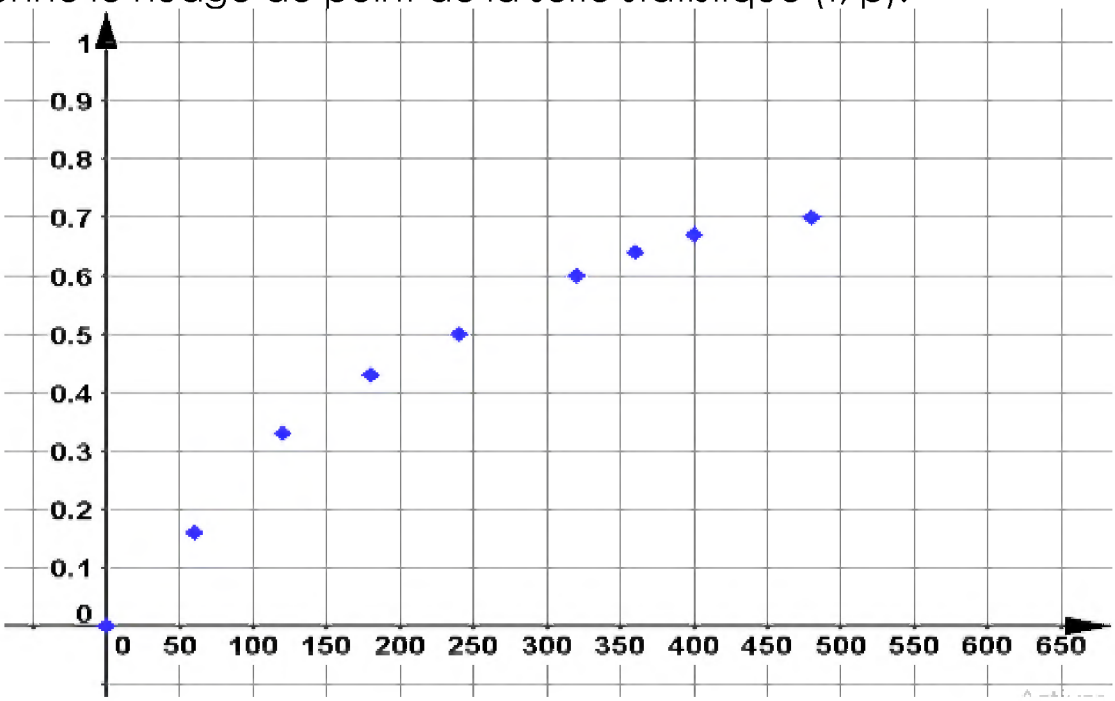
Ex

Une étude sur la durée de service à la caisse d'un magasin a donné les résultats suivants :

t	0	60	120	180	240	320	360	400	480
p	0	0,16	0,33	0,43	0,5	0,6	0,64	0,67	0,7

Où : **p** est la proportion de clients servis en une durée inferieure à un temps **t** (en secondes).

On donne le nuage de point de la série statistique (t, p).



1) un ajustement affine de cette série statistique est-il bien justifié ?

Ce nuage permet d'envisager un ajustement de type exponentiel.

On pose $\mathbf{Y = \ln\left(\frac{1}{1-p}\right)}$. les valeurs de Y, seront arrondies à 10^{-3} prés.

2)

a) recopier et compléter le tableau suivant :

t	0	60	120	180	240	320	360	400	480
Y	0	0,174	0,400	...	...	...	...	1,109	1,204

b) Calculer le coefficient de corrélation de la série (t ; Y).

c) Un ajustement affine de la série (t ; Y) est – il justifier ?

3)

a) déterminer, par la méthode de moindres carrés, une équation de la droite de régression de Y en t.

b) En déduire que l'expression de p en fonction de t est de la forme $\mathbf{p = 1 + \alpha.e^{\beta t}}$ où α et β sont deux réels dont on donnera les valeurs arrondies à 10^{-3} prés.

4)

a) Estimer la proportion des clients servis en une durée inférieure à 5 minutes.

b) Après combien de secondes, 90% des clients seront servis ?

Ex

A) La durée de vie V (en jours) d'une batterie électrique suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$.

1) une batterie survit à une utilisation entre **10** et **20** jours avec une probabilité de **0,25**.
Montrer que la valeur de λ, est $\boldsymbol{\lambda = \frac{Ln2}{10}}$

2) on prendra $\boldsymbol{\lambda \approx 0,07}$. arrondir les résultats à 10^{-3} prés

a) Quelle est la probabilité qu'une batterie ne survive pas plus que **10** jours ?

b) Quelle est la probabilité qu'une batterie reste en état de fonctionnement après **20** jours ?

c) sachant qu'une batterie a fonctionné **10** jours, quelle est la probabilité qu'elle survivra encore moins que **20** jours ?

B) On dispose, dans une boite, un lot de **10** batteries dont **4** sont chargées et les autres sont déchargées.

1) une épreuve consiste à prélever au hasard, successivement et sans remise **3** batteries de la boite.

a. calculer la probabilité **p** d'obtenir une seule batterie chargée.

b. soit X la variable aléatoire donnant le rang k de la première batterie chargée tirée ($k \in \{1, 2, 3\}$); et 0 si pas de batterie chargée tirée.

Donner la loi de probabilité de X.

2) on répète l'épreuve précédente **n** fois de suite (les épreuves sont supposées indépendantes).

a) Déterminer, en fonction de n, la probabilité $\boldsymbol{p_n}$ d'obtenir au moins une seule fois une seule batterie chargée parmi les trois batteries prélevées.

b) Combien de fois au moins peut-on répéter l'épreuve pour que $\boldsymbol{p_n \geq 0,999}$.

Ex

Soit f la fonction définie sur IR par $\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{(1+e^{-x})^2}}$ dont sa représentation graphique Γ est donnée avec la droite Δ : y=x dans un repère orthonormé (O, i, j) en annexe.
Les droites d'équations y=2 et y=0 sont deux asymptotes àΓ.
Le point d'intersection de Γ etΔ est de coordonnées $(\alpha\ ,\ \alpha)$.

A)

1) Montrer que f est une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.

2) Vérifier que la fonction g définie sur J par $\mathbf{g(x)} = \mathbf{ln}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{x}}}{\sqrt{\mathbf{2}}-\sqrt{\mathbf{x}}}\right)$ est la fonction réciproque de f.

3) déterminer $\mathbf{g(\frac{1}{2})}$. Tracer soigneusement la courbe Γ' de g dans le même repère que Γ. (en annexe)

B)

1) vérifier que $\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{2\,e^x}}{\mathbf{1+e^x}} - \frac{\mathbf{2\,e^x}}{\mathbf{(1+e^x)^2}}$

2) on désigne par $\mathcal{P}$ la partie du plan limitée par la courbe Γ et les droites d'équations x=0, x=α et y=α.
On note $\mathcal{A}$ l'aire de $\mathcal{P}$.

a) Hachurer $\mathcal{P}$ (en vert).

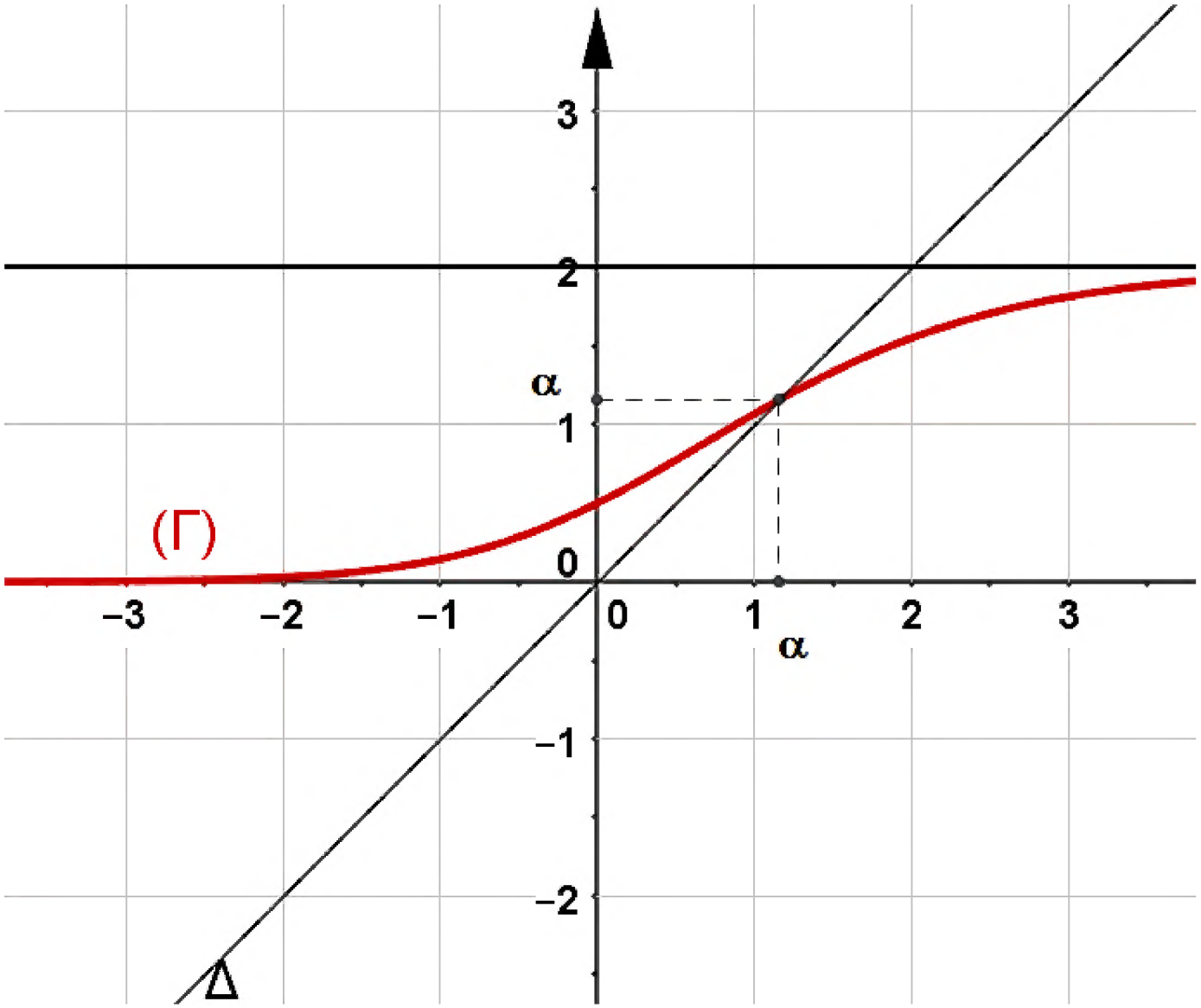
b) montrer que : $\mathcal{A} = \boldsymbol{\alpha^2 - 2\,ln\left(\frac{1+e^{\alpha}}{2}\right) - \frac{2}{1+e^{\alpha}} + 1}$

c) donner une interprétation géométrique de l'intégrale $\mathbf{I} = \int_{1/2}^{\alpha} \mathbf{ln}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{x}}}{\sqrt{\mathbf{2}}-\sqrt{\mathbf{x}}}\right)\mathbf{dx}$

d) en déduire, en fonction de α, la valeur de **I**.

3) Hachurer (en rouge) la partie $\mathcal{P}$ ' du plan limitée par les courbes Γ et Γ' et les deux axes du repère, puis déterminer son aire $\mathcal{A}$' en fonction de α.

Annexe.



Nom&Prénom.....classe.....n°.....

CORRECTION

EX1.

1) * $u_0 = 0$; $0 \leq u_0 \leq x_0$: vrai pour le 1er terme

* si $0 \leq u_n \leq x_0$ a-t-on aussi $0 \leq u_{n+1} \leq x_0$?

$0 \leq u_n \leq x_0 \Leftrightarrow f(0) \leq f(u_n) \leq f(x_0)$ car f est croissante.

or $f(0)>0$ et $f(x_0)=x_0$ donc $0< u_{n+1} \leq x_0$

d'après le principe de récurrence : $0 \leq u_n \leq x_0$ pout tout $n \in \mathbb{N}$.

2)

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
f(x)-x	+	-	

3) $u_{n+1}-u_n = f(u_n)-u_n \geq 0$ car $0 \leq u_n \leq x_0$

➔ (U_n) est croissante.

4) *(U_n) est croissante et majorée par x_0 donc elle est convergente.

* $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ (u_n) converge\ vers\ L \\ L \in [0, x_0] \\ f\ continue\ sur\ [0, x_0] \end{cases}$ ➔ f(L)=L par suite $L=x_0$.

EX2.

1) Les points du nuage sont presque alignés.

Donc, un ajustement affine est justifié.

2)

a)

t	0	60	120	180	240	320	360	400	480
Y	0	0,174	0,400	**0,562**	**0,693**	**0,916**	**1,022**	1,109	1,204

b)		r=	0.99343		
c)		**r > 0.75** ➔	ajustement	vérifié	
3)a)	Y=	0,003 t	+0,054		
b) =>	1/(1-p)=	e(0,054) *	e(0,003t)		
	1-p=	**0.947** *	e(-0,003t)		
	p=	**1**	**-**	**0,947**	**e(-0,003t)**
4)					
a) t=5mn	=> t=300				
	=> p=	1- **0,947** e(-0,9)	**=0,614**	**≈ 0,61**	
b) 90%	=>p=0,9	=> **t=749 s**			

EX3.

A.

1) p(10≤V≤20)=0,25 ⇔ $e^{-10\lambda} - e^{-20\lambda} = 0{,}25$

on pose $a=e^{-10\lambda}$ ➔ $a - a^2 = 0.25 \Leftrightarrow a^2 - a + (0{,}5)^2 = 0 \Leftrightarrow (a-0{,}5)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0{,}5$

$e^{-10\lambda} = 0{,}5 = 1/2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-10} = \frac{ln2}{10} \cong 0{,}07$

2) a) $p(V\leq 10) = 1 - e^{-10\lambda} = 1 - e^{-0{,}7} \sim \mathbf{0{,}503}$

b) $p(V\geq 20) = e^{-20\lambda} = e^{-1{,}4} \sim \mathbf{0{,}247}$

c) $p(V \leq 30 \mid V \geq 10) = \frac{p(V\leq 30 \cap V\geq 10)}{p(V\geq 10)} = \frac{p(10\leq V\leq 30)}{p(V\geq 10)} = \frac{e^{-0{,}7} - e^{-2{,}1}}{e^{-0{,}7}} = 0{,}753$

B.

1) a) $p = C_3^1 . \frac{A_4^1 . A_6^2}{A_{10}^3} = 3 . \frac{4.30}{720} = 0{,}5$

b) * $p(X=0) = \frac{A_6^3}{A_{10}^3} = \frac{120}{720} \cong 0{,}167$

* $p(X=1) = \frac{A_4^1 . A_9^2}{A_{10}^3} = \frac{288}{720} \cong 0{,}4$

* $p(X=2) = \frac{A_6^1 . A_4^1 . A_8^1}{A_{10}^3} = \frac{192}{720} \cong 0{,}266$

* $p(X=3) = \frac{A_6^2 . A_4^1}{A_{10}^3} = \frac{120}{720} \cong 0{,}167$

2) on a une loi binomiale de paramètres n et p=1/2

a) $p_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

b) $p_n \geq 0{,}999 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0{,}001 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}001)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \Leftrightarrow n \geq 9{,}966$

donc à partir de n=10 on aura $p_n \geq 0{,}999$.

EX4.

A.

1) f est continue sur IR, en plus f est strictement croissante sur IR.
Alors f réalise une bijection de IR sur J=f(IR)=] 0, 2[
car, $\lim_{+\infty} f(x) = 2 \ et \ \lim_{-\infty} f(x) = 0$ "*deux asymptotes horizontales*".

2) $f(g(x)) = \frac{2}{(1+e^{-g(x)})^2} = \frac{2}{\left(1+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2} = \frac{2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2} = x$ pour xϵJ.

3) $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$

la courbe Γ' est le symétrique de Γ par rapport àΔ :y=x ; elle passe par les deux points (1/2 ,0) et (α,α) et admet deux asymptotes verticales d'éq° x=0 et x=2.(en annexe)

B.

1) $\frac{2\,e^x}{1+e^x} - \frac{2\,e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{2\,e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^2} - \frac{2\,e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{2e^{2x}}{\left((1+e^{-x})e^x\right)^2} = \frac{2}{(1+e^{-x})^2} = f(x)$

2) a) $\mathcal{P}$ la partie du plan limitée par la courbe Γ et les droites d'équations x=0, x=α et y=α. (colorée en vert en annexe).

b) $A = aire\ du\ carré - aire["\Gamma, (ox), x = 0, x = \alpha"] = \alpha^2 - \int_0^\alpha f(x)\ dx$

$$= \alpha^2 - \int_0^\alpha \left(\frac{2\,e^x}{1+e^x} - \frac{2\,e^x}{(1+e^x)^2}\right) dx = \alpha^2 - \left[2Ln(1+e^x) + \frac{2}{1+e^x}\right]_0^\alpha$$

$$= \alpha^2 - 2Ln\left(\frac{1+e^\alpha}{2}\right) - \frac{2}{1+e^\alpha} + 1$$

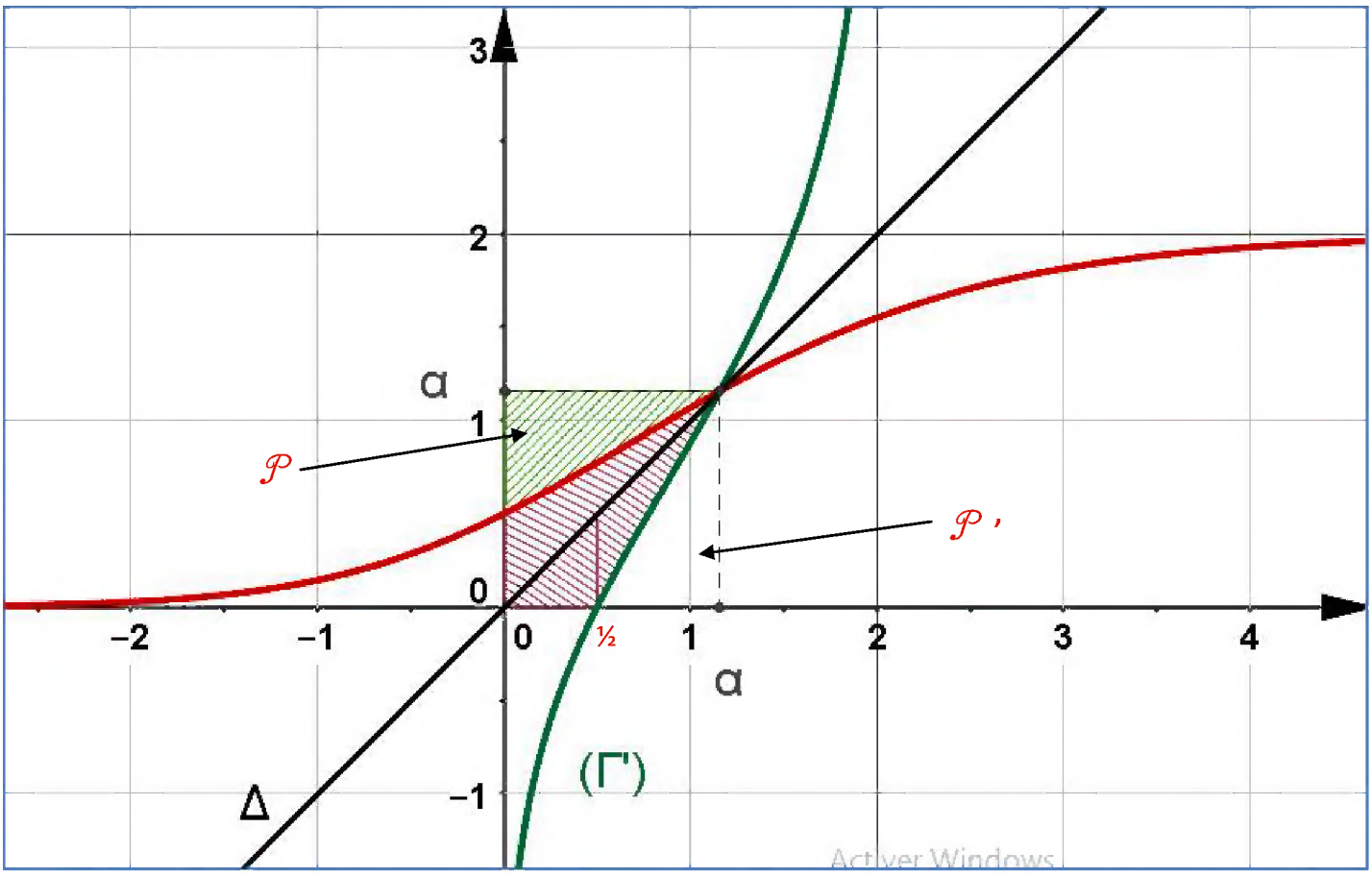
c) $\mathbf{I = \int_{1/2}^{\alpha} \ln\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}\right) dx = I = \int_{\frac{1}{2}}^{\alpha} g(x)\,dx}$: l'aire de la région du plan Limitée par [Γ', (ox), x=1/2, x=α]

d) pour des raisons de symétrie $I = A = \alpha^2 - 2Ln\left(\frac{1+e^\alpha}{2}\right) - \frac{2}{1+e^\alpha} + 1$

3) la partie $\mathcal{P}$ ' du plan limitée par les courbes Γ et Γ' et les deux axes du repère est colorée en rouge (en annexe.

$$A' = aire\ du\ carré - (A + I)$$

$$= \alpha^2 - 2\left(\alpha^2 - 2Ln\left(\frac{1+e^\alpha}{2}\right) - \frac{2}{1+e^\alpha} + 1\right)$$

$$= -\alpha^2 + 4Ln\left(\frac{1+e^\alpha}{2}\right) + \frac{4}{1+e^\alpha} - 2 \quad u.a.$$

Annexe.