DEVOIR SYNTHESE 2. (CORRECTION)

S M A A L I. **4°T2.**

2019

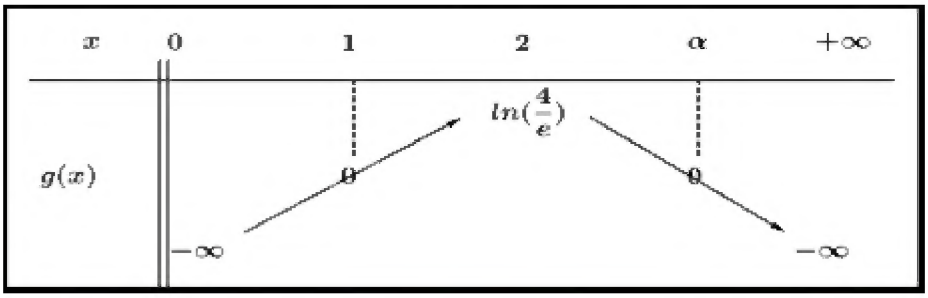
(3 H).

Ex I.

I. ....

1) *Soit g la fonction définie sur* $]0, +\infty[$ *par* $g(x) = 1 - x + 2\ln(x)$

dont son tableau de variation est le suivant :



0,5 + 0,5 *dresser le tableau de signe de g(x).* *déduire le tableau de signe de g (1/x).*

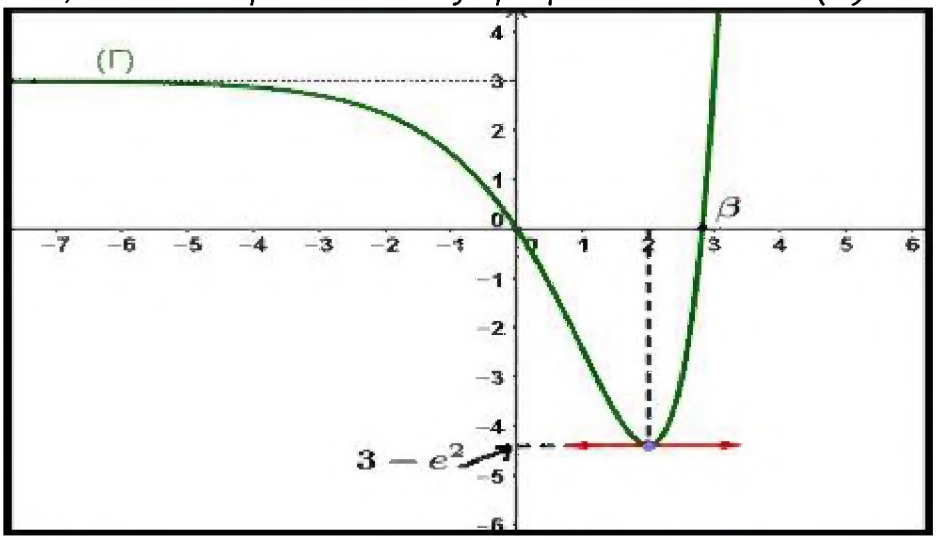
x	0		1		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

➔

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1		$+\infty$
$g(\frac{1}{x})$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

2) *soit h la fonction définie sur IR par* $h(x) = (ax + b)e^x + c$

où $a, b, c \in IR$, *dont sa représentation graphique est la courbe* (Γ) *suivante :*



0,5 **a-** *lire graphiquement h(0) et déduire que* $b + c = 0$

h(0)=0 *sig* $(0+b)e^0+c=0$ *sig* *b + c=0*

0,5 **b-** *lire graphiquement* $\lim_{x\to-\infty} h(x)$ *et déduire que* $c = 3$

$\lim_{x\to-\infty} h(x) = 3$ *sig* $\lim_{x\to-\infty} (ax + b).e^x + c = 3$

sig $\lim_{x\to-\infty} a.xe^x + b.e^x + c = 3$ *sig* *c=3*

0,5 **c-** *donner l'expression de h'(x) en fonction de* x, a et b.

$h'(x) = a\ e^x + (ax+b)\ e^x = (ax+a+b)\ e^x$

0,5 **d-** *lire graphiquement h'(2) et déduire que* $3a + b = 0$

h'(2)=0 *sig* $(2a+a+b)e^2=0$ *sig* *3a+b=0*

0,5 **e-** prouver alors que $h(x) = (x-3)e^x + 3$

on a : c=3 donc b=-3 et a=1 ➔ $h(x) = (x-3)e^x + 3$

0,5 **f-** dresser graphiquement le tableau de signe de h(x).

x	$-\infty$		0		β		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

II. ....

On considère la fonction f définie sur IR par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{1-e^x} & si\ x<0 \\ -x + x^2\left(1+\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) & si\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

Et (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé$(O,\vec{i},\vec{j})$.

1 **1)** montrer que f est continue en O.

f (0)=0. / $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{-x^2}{\frac{e^x-1}{x}} = \frac{0}{1} = 0.$ /

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} -x + x^2 - x^2\ln(x) = 0.$ ➔ f est continue en O.

1+ 0,5 **2)** étudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en O,

$\lim_{x\to0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^-} \frac{x^2}{1-e^x} = \lim_{x\to0^-} \frac{-x}{\frac{e^x-1}{x}} = 0$ ➔ f est dérivable à gauche en O.

$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+} -1 + x - x\ln(x) = -1$ ➔ f est dérivable à droite en O.

puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

$f_g'(0) \neq f_d'(0)$ ➔ (C) admet au point O deux demi-tangentes :

* T_g : y=0 et x<0
* T_d : y=-x et x>0

1 **3)** montrer que la courbe (C) admet deux branches infinies de direction $(o,\vec{j})$.

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x[-1 + x(1-\ln x)] = -\infty.$

  et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} -1 + x(1-\ln x) = -\infty.$ CQFD
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{1-e^x} = -\infty.$

  et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{1-e^x} = +\infty.$ CQFD

4)

0,75 **a-** montrer que pour tout x>0, $f'(x) = x.g\left(\frac{1}{x}\right)$

pour x>0 ; f(x)= $-x + x^2\left(1+\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -x + x^2 - x^2\ln x$;

➔ $f'(x) = -1 + 2x - (2x.\ln x + x) = -1 + x - 2x.\ln x = x\left(-\frac{1}{x} + 1 + \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x.g\left(\frac{1}{x}\right)$

0,75 **b-** montrer que pour tout x<0, $f'(x) = \left(\frac{x}{1-e^x}\right)^2.h(x)$

pour x<0 ; f(x)= $\frac{x^3}{1-e^x}$;

➔ $f'(x) = \frac{3x^2(1-e^x) - x^3(-e^x)}{(1-e^x)^2} = \frac{x^2}{(1-e^x)^2}.[3(1-e^x) + xe^x] = \left(\frac{x}{1-e^x}\right)^2.h(x)$

5)

0,5 **a-** vérifier que $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1-\alpha}{2.\alpha^2}$

$f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}(1+\ln\alpha)$

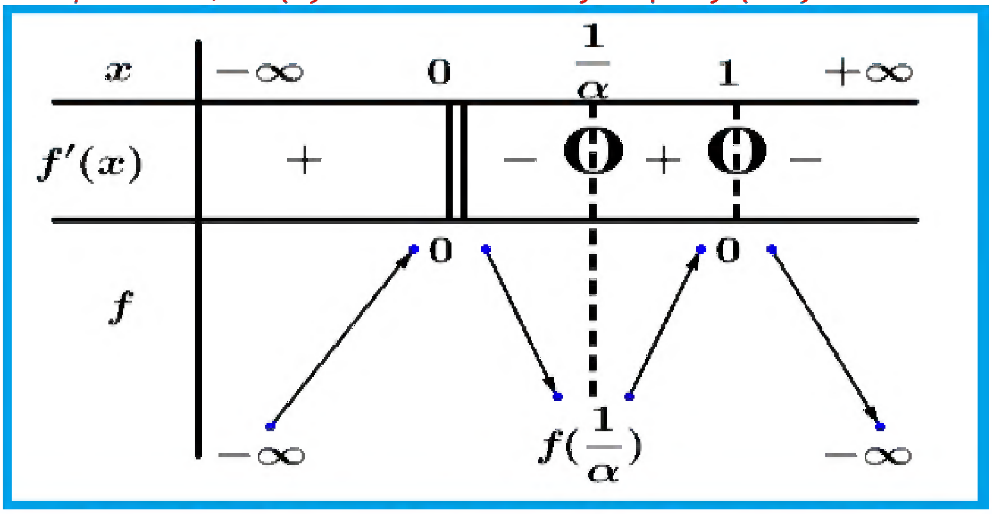
or $g(\alpha) = 0 \leftrightarrow 1 - \alpha + 2\ln\alpha = 0 \leftrightarrow \ln\alpha = \frac{\alpha-1}{2}$

1 donc $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{-\alpha+1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{\alpha-1}{2} = \frac{-2\alpha+2+\alpha-1}{2\alpha^2} = \frac{1-\alpha}{2\alpha^2}$

b- dresser le tableau de variation de f.

pour x<0, f '(x) est de même signe que h(x).

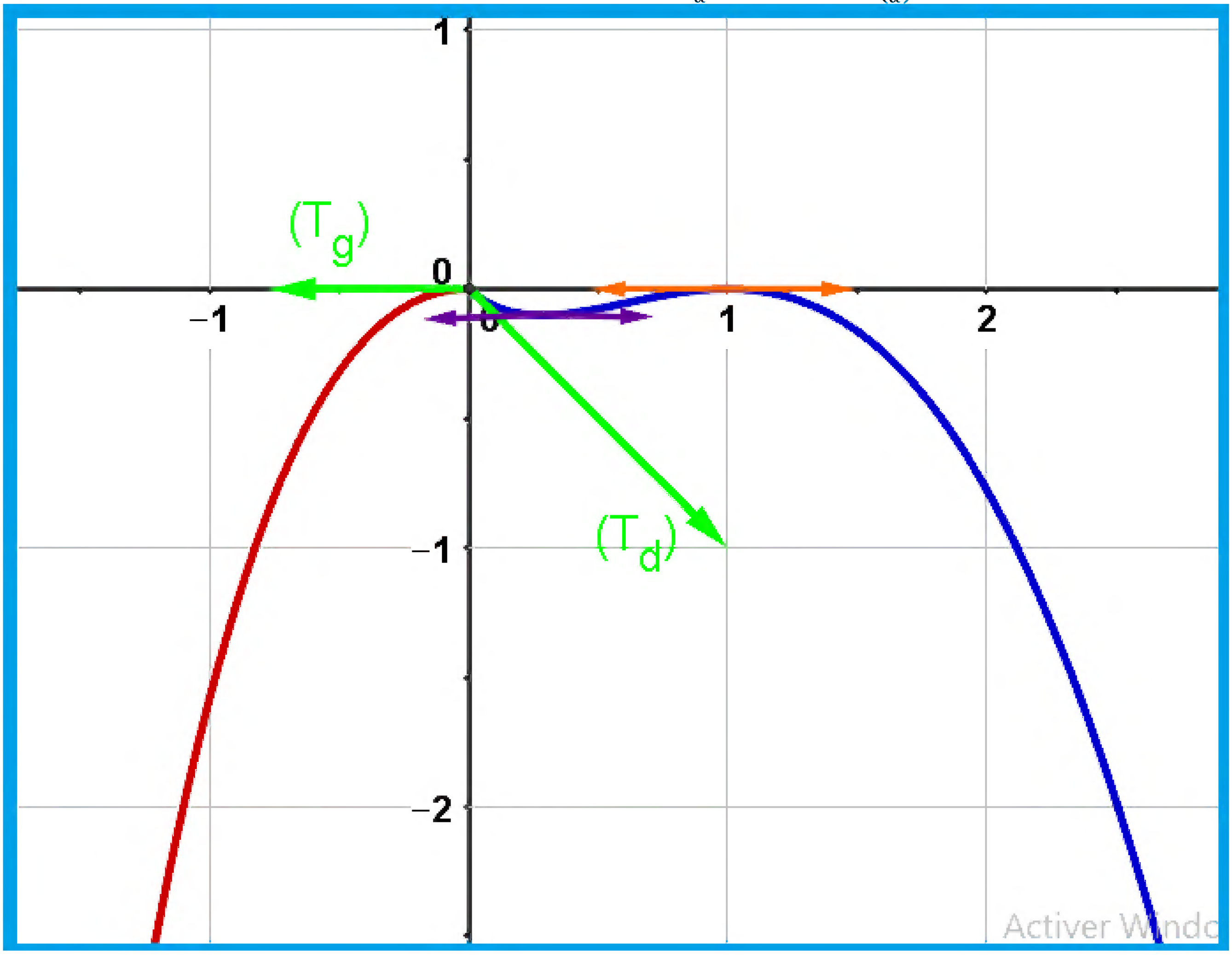
pour x>0, f '(x) est de même signe que g (1/x).



6) Tracer la courbe (C) en affichant toutes les tangentes horizontales et les

1,5 demi-tangentes à (C).

- unité graphique : 3cm x 3cm.
- on donne : $\alpha \cong 3{,}5$; $\frac{1}{\alpha} \cong 0{,}3$ et $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) \cong -0{,}1$.



Ex 2.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $\mathbf{A(1,1,0)}$; $\mathbf{B(-1,2,1)}$ et $\mathbf{C(0,1,1)}$.

1) a) *Déterminer les composantes du vecteur* $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

0,75 $$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

b) *En déduire que les points A, B et C déterminent un plan (P) dont une équation est* $\mathbf{x+y+z=2}$

0,75 $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ donc A, B et C déterminent un plan P.

$\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ *est un vecteur normal à P donc P : x+y+z+d=0*

Or A∈P ➔ 1+1+0+d=0 càd. d=−2 Alors ***P : x+y+z−2=0***

2) *Soit (Δ) la droite dont une représentation paramétrique est:*

0,75 $$\begin{cases}\mathbf{x=-1}\\ \mathbf{y=-1+3t}\\ \mathbf{z=1-3t}\end{cases}(\mathbf{t}\in\mathbb{R}).$$

Montrer que (Δ) est strictement parallèle à (P).

Soit M(x, y, z) ∈Δ∩P ⇔ $\begin{cases}x=-1\\ y=-1+3t\\ z=1-3t\\ x+y+z-2=0\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ *donc −1+(−1+3t)+(1−3t)−2=0*

➔ −3=0 impossible donc Δ∩P=∅ càd. Δ est strictement parallèle à P.

3) *Soit α un réel et* $\overrightarrow{U_\alpha}\begin{pmatrix}-1\\\alpha\\-\alpha\end{pmatrix}$ *un vecteur de l'espace.*

On considère (S_α) *l'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace tels que*

$$\mathbf{OM^2-2\left(\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{U_\alpha}\right)+\alpha(\alpha+1)=0}$$

a) *Montrer que, pour tout réel α,* (S_α) *est une sphère de centre*

1,25 $\mathbf{I_\alpha(-1,\alpha,-\alpha)}$ *et de rayon* $\mathbf{R_\alpha=\sqrt{\alpha^2-\alpha+1}}$.

$$OM^2-2\left(\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{U_\alpha}\right)+\alpha(\alpha+1)=0\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1\\\alpha\\-\alpha\end{pmatrix}+\alpha^2+\alpha=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2(-x+\alpha y-\alpha z)+\alpha^2+\alpha=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+y^2-2\alpha y+z^2+2\alpha z+\alpha^2+\alpha=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-\alpha)^2+(z+\alpha)^2=\alpha^2-\alpha+1\quad>0\quad "=(\alpha-\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{1}{2}"$$

Donc (S_α) *est une sphère de centre* $\mathbf{I_\alpha(-1,\alpha,-\alpha)}$ *et de rayon* $\mathbf{R_\alpha=\sqrt{\alpha^2-\alpha+1}}$.

b) *Montrer que, pour tout α∈ℝ, le point* $\mathbf{I_\alpha}$ ∈ **(Δ)**.

0,5 $\begin{cases}-1=-1\\ \alpha=-1+3t\\ -\alpha=1-3t\end{cases}\leftrightarrow t=\frac{\alpha+1}{3}$ *donc* I_α ∈ (Δ).

c) *Calculer pour tout réel α, le volume* V_α *du tétraèdre* $\mathbf{ABCI_\alpha}$.

0,5 $$V_\alpha=\frac{1}{6}.\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AI_\alpha}\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-2\\\alpha-1\\-\alpha\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}.$$

4) a) *quelles sont les sphères* (S_α) *tangents à (P) ? et préciser en quels points.*

1+ $$d(I_\alpha;P)=R_\alpha\leftrightarrow\frac{|-1+\alpha+(-\alpha)-2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\sqrt{\alpha^2-\alpha+1}\leftrightarrow 3=\alpha^2-\alpha+1\leftrightarrow\alpha^2-\alpha-2=0$$

donc $\alpha=-1$ ou $\alpha=2$ ➔ *les sphères* (S_2) *et* (S_{-1}) *sont tangents à P.*

1 les points de tangence H_α vérifient : $\begin{cases} \overrightarrow{I_\alpha H_\alpha} = t.\vec{n} \\ H_\alpha \in P \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = -1+t \\ y = \alpha + t \\ z = -\alpha + t \\ x+y+z-2=0 \end{cases} \rightarrow t = 1$

donc $H_\alpha(0,\ \alpha+1,\ -\alpha+1)$ ➔ $H_2(0,\ 3,\ -1)$ et $H_{-1}(0,\ 0,\ 0) \equiv O$.

0,5 **b)** Vérifier que les sphères (S_α) et $(S_{1-\alpha})$ ont le même rayon.

$R^2_{1-\alpha} = (1-\alpha)^2 - (1-\alpha) + 1 = 1 + \alpha^2 - 2\alpha - 1 + \alpha + 1 = \alpha^2 - \alpha + 1 = R^2_\alpha$

1 **c)** Déterminer α pour que le plan (P) coupe chacune des sphères (S_α) et $(S_{1-\alpha})$ selon un cercle de rayon **2**.

$R^2_\alpha - d^2(I_\alpha, P) = (2)^2 \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha + 1 - 3 = 4 \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 6 = 0$

➔ **$\alpha = 3$ ou $\alpha = -2$.**