DEVOIR CONTROLE 3.

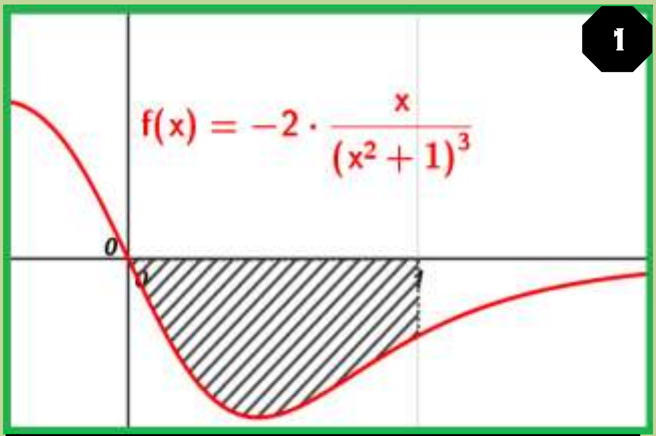
S M A A L I. **(CORRECTION)**

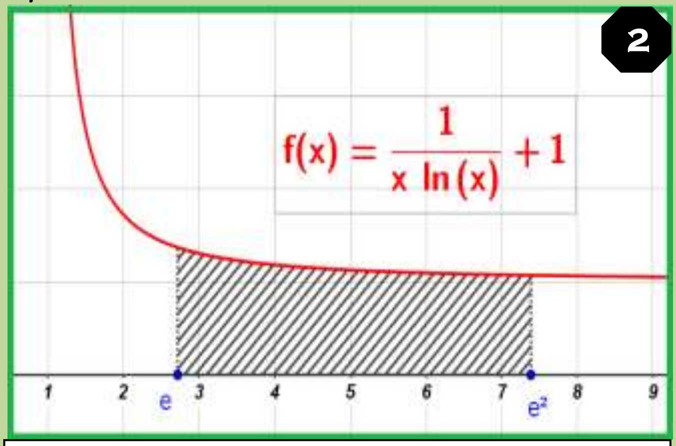
4°T2.

(le : 18-02-2019)

2019

E 1 *Déterminer en (u.a.) l'aire de chaque partie Hachurée :*





1 + 1

f est continue sur [0, 1]

f est de la forme $-U'/U^3$ où $U=x^2+1$ et $U'=2x$

Alors une primitive de f est de la forme $1/2U^2$ +c

➔ $F(x)= 1/2(x^2+1)^2$ +c

donc l'aire est : A=

$$\int_0^1 -f(x)dx = [-\frac{1}{2(x^2+1)^2}]_0^1 = -\frac{1}{8}+\frac{1}{2}$$
$$= 3/8 \quad u.a.$$

f est continue sur $[e, e^2]$

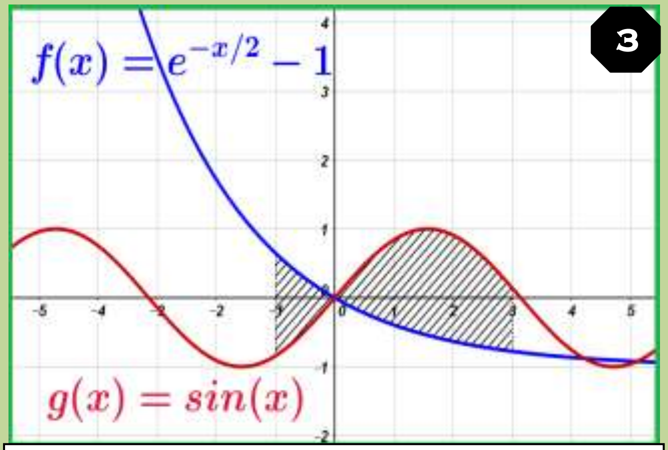
f est de la forme U'/U +1 où U=Lnx et U'=1/x

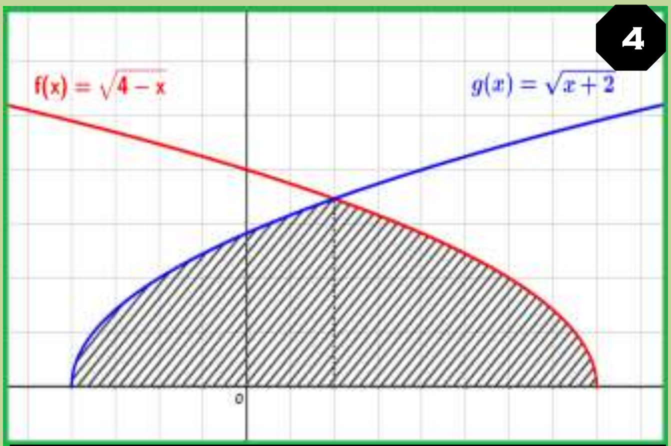
Alors une primitive de f est de la forme LnU+x +c

➔ F(x)= Ln(lnx)+x+c

donc l'aire est :A=

$$\int_e^{e^2} f(x)dx = [\mathrm{Ln}(\ln x)+x]_e^{e^2} = \ln 2 + e^2 - 0 - e$$
$$= e^2 - e + \ln 2 \quad u.a.$$





1 + 1

f et g sont continues sur [-1, 3]

➔ $F(x)= -2e^{-x/2}-x+c$ et $G(x)=-\cos x+c'$

donc l'aire est :A= $\int_{-1}^{3}|f(x)-g(x)|dx$

$$= \int_{-1}^{0} f(x)-g(x)\,dx + \int_{0}^{3} g(x)-f(x)\,dx$$
$$= F(0)-G(0)-F(-1)+G(-1)+G(3)-F(3)-G(0)+F(0)$$
$$= -2+1+2e^{\frac{1}{2}}-1-\cos(-1)-\cos(3)+2e^{-\frac{3}{2}}+3+1-2$$
$$= 2e^{\frac{1}{2}}+2e^{-\frac{3}{2}}-\cos 3-\cos(-1) \quad u.a.$$

f(x)=0 ⇔x=4 ; g(x)=0 ⇔x=-2 ; f(x)=g(x)⇔x=1.

g est continue sur [-2, 1] et f continue sur [1, 4].

➔ $F(x)=-\frac{2}{3}(4-x)\sqrt{4-x}$+c

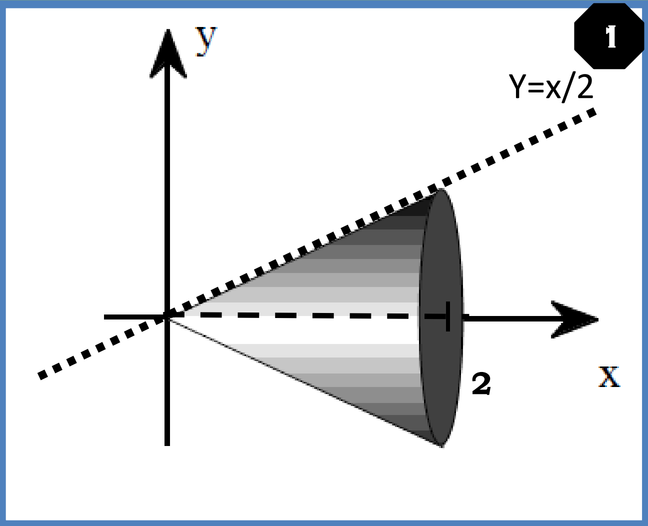
et $G(x)=\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2}$+c'

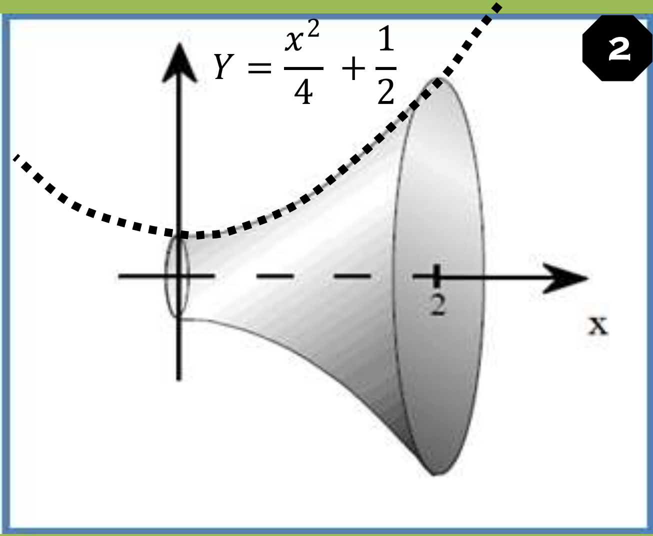
Donc l'aire est :A=

$$\int_{-2}^{1} g(x)dx + \int_{1}^{4} f(x)dx = G(1)-G(-2)+F(4)-F(1)$$
$$= 2\sqrt{3}-0+0-\sqrt{3} = \sqrt{3} \quad u.a.$$

E2

Déterminer (en u.v.) le volume de chacun des solides de révolution d'axe (ox) suivants :





1 + 1

f : x⟶x est continue sur [0, 2]

V=

$\pi \int_0^2 \frac{x^2}{4} dx = \pi[\frac{x^3}{12}]_0^2 = \pi(\frac{8}{12} + 0)$

$= 2\pi/3 \quad u.v.$

f : x⟶x²/4 +1/2 est continue sur [0, 2]

V=

$\pi \int_0^2 \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\right)^2 dx = \pi \int_0^2 \frac{x^4}{16} + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}\, dx$

$= \pi[\frac{x^5}{80} + \frac{x^3}{12} + \frac{x}{4}]_0^2 = \pi\left(\frac{32}{80} + \frac{8}{12} + \frac{2}{4}\right) = \frac{47}{30}\pi \quad u.v.$

E3

1) Soit g la fonction définie sur l'intervalle] 1 ; +∞ [par :

$g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$.

1

a/ Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout x > 1 on a: $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$

g(x)=

$\frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1} = \frac{a}{x} + \frac{b(x+1)+c(x-1)}{x^2-1} = \frac{a(x^2-1)+bx(x+1)+cx(x-1)}{x(x^2-1)} = \frac{(a+b+c)x^2+(b-c)x-a}{x(x^2-1)}$

par identification on aura: $\begin{cases} -a = 1 \\ b - c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$

donc $g(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}$

1

b/ déduire la valeur de ; $\mathbf{I} = \int_2^3 \mathbf{g(x)\,dx}$.

$I = \int_2^3 -\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}\; dx = [-lnx + \frac{1}{2}\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln(x+1)]_2^3$

$= (-ln3 + ln\sqrt{2} + ln2) - (-ln2 + 0 + ln\sqrt{3}) = \ln\left[\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\right] = \frac{5}{2}ln2 - \frac{3}{2}ln3.$

1

2) *Donner une primitive F de la fonction f définie sur l'intervalle* $]1\,;+\infty[$ *par :* $f(x)=\frac{x}{(x^2-1)^2}$

f est de la forme $\frac{U'}{2U^2}$ *où* $U=x^2-1$ *et* $U'=2x$

Alors une primitive de f est de la forme $-\frac{1}{2U}+c$

➔ $F(x)=\frac{-1}{2(x^2-1)}+c$

3) *Déduire à l'aide d'une intégration par parties la valeur de :*

$$K=\int_2^3 \frac{x\,.\,\ln x}{(x^2-1)^2}\,dx$$

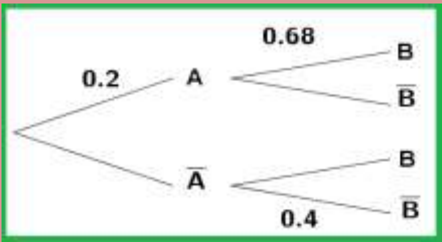
2

On pose $\begin{cases} u(x)=\ln x \\ v'(x)=\frac{x}{(x^2-1)^2}\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x)=\frac{1}{x} \\ v(x)=\frac{-1}{2(x^2-1)}\end{cases}$

Donc $K=\left[\frac{-\ln x}{2(x^2-1)}\right]_2^3+\int_2^3\frac{1}{2x(x^2-1)}\,dx=\frac{-\ln 3}{16}+\frac{\ln 2}{6}+I=\frac{-25}{16}\ln 3+\frac{8}{3}\ln 2$

E4

On considère l'arbre de probabilités suivant :



L'affirmation suivante **« la probabilité de A sachant B est égale à 0,32 »** *est-elle vraie ou fausse ? justifier.*

2

$P(A/B)=p(A\cap B)/p(B)$.

OR $p(A\cap B)=0{,}2\cdot 0{,}68=0{,}136$

et $p(B)=0{,}2\cdot 0{,}68+(1-0{,}4)\cdot(1-0{,}2)=0{,}616$

Donc $p(A/B)=0{,}136/0{,}616=0{,}22$ ➔ l'affirmation est fausse.

E5

Un appareil ménager peut présenter après sa fabrication deux défauts.
On appelle A l'événement « l'appareil présente un défaut d'apparence» et F l'événement « l'appareil présente un défaut de fonctionnement ».
On suppose que les événements A et F sont ***indépendants*** *(: p(A/F)=p(A))*
On sait que la probabilité que l'appareil présente un défaut d'apparence est égale à **0,02** *et que la probabilité que l'appareil présente au moins l'un des deux défauts est égale à* **0,069**. *On choisit au hasard un des appareils.*
Quelle est la probabilité que l'appareil présente le défaut F?

2

On a : $p(A)=0{,}02$; $p(A\cup F)=0{,}069$ et $p(A/F)=p(A)$ càd. $p(A\cap F)=p(A)\cdot p(F)$

Or : $p(A\cup F)=p(A)+p(F)-p(A\cap F)$ donc $p(A\cup F)=p(A)+p(F)\cdot[1-p(A)]$

➔ $p(F)=\frac{p(A\cup F)-p(A)}{1-p(A)}=\frac{0{,}069-0{,}02}{0{,}98}=0{,}05$.

E6

Dans un jeu, un joueur doit effectuer 10 parties.
On suppose que toutes les parties sont identiques et indépendantes.
La probabilité de gagner chaque partie est égale à 1/4.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

1) a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X?

On a une succession de 10 expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles à deux issues :

réussite : le joueur gagne ($p = 1/4$)

1 échec : le joueur ne gagne pas ($q = 1 - p = 3/4$)

donc la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur suit une loi binomiale de paramètres ($n=10$; $p=1/4$).

b) Quelle est la probabilité de gagner au moins une partie?

1 (arrondir à 10^{-2} près).

$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - (3/4)^{10} \approx 0{,}94$

0.5 **c)** Déterminer l'espérance de X.

$E(X)=n.p = 10/4 = 2{,}5$.

2) Le joueur doit payer 30 DT pour jouer les 10 parties.
Chaque partie gagnée lui rapporte 8 DT.

1 **a)** Expliquer pourquoi ce jeu est perdant pour le joueur.

Le joueur en moyenne gagne 2,5 parties donc reçoit $8.2{,}5 = 20$ DT or il paye 30 DT pour pouvoir jouer donc ce jeu est désavantageux pour le joueur.

1.5 **b)** Calculer la probabilité que le gain du joueur est supérieur à 40 DT?

(arrondir à 10^{-5} près).

Le joueur réalise un bénéfice supérieur à 40 DT s'il reçoit au moins 70 DT (la somme versée initialement pour pouvoir jouer + le bénéfice).

Une partie gagnée rapport 8 DT donc le joueur doit gagner au moins 9 parties.

$p(X \geq 9) = p(X = 9) + p(X = 10) \approx 0{,}00003$.

BAREME APPROXIMATIF : 4+2+5+2+2+5.