DEVOIR CONTROLE 1. (correction)

S M A A L I.

(le : 08/11/2018)

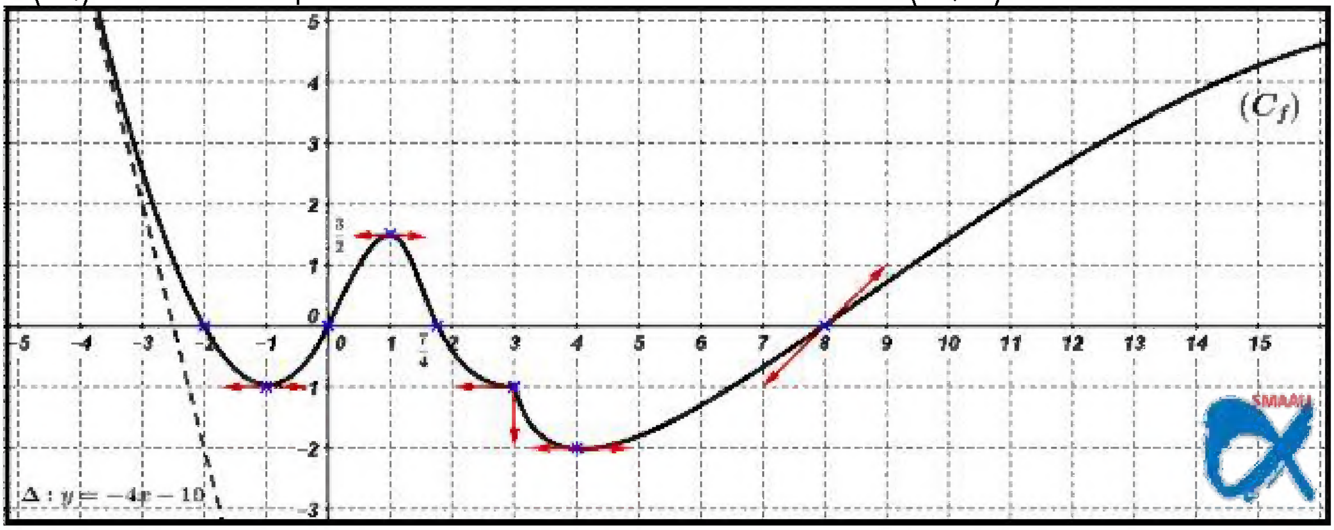
4 °T2 .

2019/18

Ex 1.

1. La figure suivante désigne la courbe (C_f) d'une fonction f définie sur IR. on donne :

* (C_f) admet au voisinage de (-∞) une asymptote oblique Δ : y=-4x-10.
* (C_f) admet au voisinage de (+∞) une branche infinie horizontale.
* (C_f) admet au point (3 ; -1) deux demi-tangentes.
* (C_f) admet un point d'inflexion de coordonnées (8 ; 0).



Déterminer sans aucune justification :

0,5 **a)** le domaine de continuité de f est **IR.**
le domaine de dérivabilité de f est **IR\ {3}.**

1,25 **b)** $f(-1) = -1$; $f(0) = 0$; $f(1) = \frac{3}{2}$; $f(4) = -2$ *et* $f(8) = 0$

1,25 **c)** $f'(-1) = 0$; $f'(1) = 0$; $f'(4) = 0$; $f'(8) = 1$ et $f''(8) = 0$

1 **d)** $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$;
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + 4x = -10$

1 **e)** $\lim_{x\to 8} \frac{f(x)}{x-8} = 1$; $\lim_{x\to 3^-} \frac{f(x)+1}{x-3} = 0$;
$\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{f(x)+1}{x-3} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2f(x)-3}{x-1} = 0$

1 **f)** le tableau de variation de f est

x	-∞		-1		1		3		4		+∞
f'(x)		-	0	+	0	-	‖	-	0	+	
f(x)	+∞	↘	-1	↗	3/2	↘	-1	↘	-2	↗	+∞

2. on considère la fonction g définie sur IR* par $g(x) = \frac{-x^2}{1-\sqrt{x^2+1}}$

a) montrer que g admet un prolongement par continuité en 0.

0,5
- g n'est pas défini en 0.
- $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2.(1+\sqrt{x^2+1})}{-x^2} = \lim_{x\to 0} 1 + \sqrt{x^2+1} = 2$

Donc g est prolongeable par continuité en 0.

b) montrer que pour tout x ≠ 0, on a : $g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

0,5
g(x)= $1 + \sqrt{x^2+1}$ donc g'(x)=$\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

c) montrer que dans] 0 ; + ∞[; l'équation g(x)=3 admet une unique solution.

1
Pour x>0, g est continue et g'(x)>0 donc g est strictement croissante

En plus g (] 0, + ∞[)=]$\lim_{x\to 0} g(x)$, $\lim_{x\to +\infty} g(x)$ [=]2, +∞[contient 3.

(puisque : $\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} 1 + \sqrt{x^2+1} = +\infty$.)

T.V.I. ➔ g(x)=0 admet une unique solution dans] 0, + ∞[.

3. on considère la fonction h définie par $h(x) = g[f(x)]$

a) déterminer le domaine définition de la fonction h.

0,5
h(x) existe pour x∊D_f et f(x)∊D_g càd. pour x ∊ IR et f(x)≠0

donc pour x∊ IR\ {-2 ; 0 ; 7/4 ; 8}.

b) calculer : $\lim_{x\to -\infty} h(x)$; $\lim_{x\to (-2)^+} h(x)$ et $\lim_{x\to 3^+} h(x)$

1,5
- on a $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{X\to +\infty} g(X) = +\infty$
  donc $\lim_{x\to -\infty} h(x) = +\infty$
- on a $\lim_{x\to (-2)^+} f(x) = 0$ et $\lim_{X\to 0} g(X) = 2$
  donc $\lim_{x\to (-2)^+} h(x) = 2$
- on a $\lim_{x\to 3} f(x) = -1$ et $\lim_{X\to -1} g(X) = \frac{-1}{1-\sqrt{2}}$
  donc $\lim_{x\to 3} h(x) = 1 + \sqrt{2}$

Ex 2.

Les deux parties A et B sont indépendantes.

Partie A.

Pour chacune des propositions données, choisir la seule réponse juste :

1
1) L'écriture exponentielle du nombre complexe (3 sinx + 3i cosx) est :

a. $3\, e^{ix}$ ✗

b. $3\, e^{i(x-\pi/2)}$ ✗

c. $3\, e^{i(\pi/2-x)}$ ■

1
2) Soient A, B et C trois points distincts vérifiant : $z_A - z_C = 7(z_A - z_B)$. alors :

a. AB = 7.AC ✗

b. A, B et C sont alignés. ■

c. Le triangle ABC est rectangle en A. ✗

1
3) Soit Z=sinα. (cosα +i sinα) avec α∊]-π ; 0[. alors :

a. Arg (Z) = α +2kπ ; k∊$\mathbb{Z}$. ✗

b. |Z| = sinα. ✗

c. |Z| = - sinα. ■

Partie B.

1) **a.** Déterminer les racines carrées de **(8-6i)**

1 On résout le système : (S) $\begin{cases} x^2+y^2=|8-6i|=10 \\ x^2-y^2=Ré(8-6i)=8 \\ 2xy=Im(8-6i)=-6 \end{cases}$

(S) ⇔ $\begin{cases} 2x^2=18 \\ 2y^2=2 \\ 2xy=-6 \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} x=3 \text{ ou } x=-3 \\ y=1 \text{ ou } y=-1 \\ x \text{ et } y \text{ sont de signes opposés} \end{cases}$ donc $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$

Par suite les racines carrées de (8-6i) sont (3-i) et (-3+i).

1 **b.** Résoudre dans ℂ ; l'équation(E) : **Z² + (1+i) Z - 2(1-i)=0**

le discriminant Δ = (1+i) ² - 4.1. (-2+2i) = 2i + 8 - 8i = 8 – 6i

une racine carrée de Δ est δ=3-i

on a deux solutions : z'=(-1-i+3-i)/2 **=1-i** et z''=(-1-i-3+i)/2 **=-2**

$S_{\mathbb{C}}$ = {-2; 1- i}.

2) on considère dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ les points A, B et C d'affixes respectifs **z_A=-2 ; z_B=1-i et z_C=2+2i**

1 **a.** donner la forme exponentielle de z_B et en déduire celle de z_C.

$$z_B=1-i=\sqrt{2}.e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad et \quad z_C=2.(1+i)=2.\overline{z_B}=2\sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{4}}$$

b. montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en B.

1 $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=\frac{-3+i}{1+3i}=\frac{i\,(3i+1)}{1+3i}=i,\ imaginaire\ pur$ donc $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CB}$

En plus $\frac{AB}{BC}=1$ donc ABC est un triangle rectangle et isocèle en B.

1 **c.** déterminer l'affixe du point D pour que, ABCD soit un carré.

ABCD est un carré donc un parallélogramme alors $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

Par suite $z_D-z_A=z_C-z_B$ ➔ $z_D=2+2i-1+i-2=\mathbf{-1+3i}$

3) à tout point M(z) du plan distinct de B, on associe le point M'(z') tel que **z'=** $\boldsymbol{\frac{z+2}{z+i-1}}$

1 **a.** déterminer l'ensemble (G) des points M(z) tel que |z'|=1

$|z'|=1 \Leftrightarrow \frac{|z_M-z_A|}{|z_M-z_B|}=1 \Leftrightarrow AM=BM \Leftrightarrow M\in méd[AB]$. **donc (G)=méd [AB]**.

1 **b.** déterminer l'ensemble (H) des points M(z) tel que z' est réel.

$z'\in IR \Leftrightarrow \frac{z_M-z_A}{z_M-z_B}\in IR \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\ et\ \overrightarrow{BM}\ sont\ colinéaires \Leftrightarrow M\in(AB)$

Donc (H) = (AB)\ {B}.