DEVOIR BLANC n°3.

2019/2020

3°M.

S M A A L I.

Ex 1.

L'espace est rapporté a un repère orthonormé direct $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

1) Soit le plan P : 2x + 2y + z – 5 = 0 et les points A(0, 1, 0) et B(0, 0, -1) et on désigne par Q le plan passant par A et B et perpendiculaire à P.

a/ Montrer qu'une équation de Q est : x – 2y + 2z + 2 = 0.

b/ Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite $\Delta = P \cap Q$ est

$$\begin{cases} x = -2\alpha + 4 \\ y = \alpha \\ z = 2\alpha - 3 \end{cases} \quad ; \alpha \in \mathrm{IR}.$$

2) Pour tout réel m on considère l'ensemble S_m des points M(x, y, z) telsque :

$x^2 + y^2 + z^2 - 2(m + 1)x - 2y - 2(m + 1)z + 2m + 3 = 0$.

a/ Déterminer les valeurs de m pour les quelles S_m est une sphère.

b/ Etudier suivant m la nature de $S_m \cap P$.

3) a/ Montrer que $S_1 \cap P$ est un cercle ζ de centre H(4/3, 1/3, 5/3) et dont on calculera le rayon.

b/ Calculer d(H ; Δ). En déduire la position relative de ζ et Δ.

4) a/ Donner une représentation paramétrique de la droite D passant par H et perpendiculaires a P.

b/ Montrer qu'il existent deux sphères tangentes au plan Q et contenant ζ. Préciser leurs centres et leurs rayons

Ex 2.

(Les résultats sont arrondis à 10^{-2})

Un groupe de 10 personnes comprends : 5 personnes de groupe sanguin A, 3 personnes de groupe B et 2 personnes de groupe O.

I/ On choisit au hasard 3 personnes.

a/ Montrer que le nombre de possibilités est card Ω = 120.

b/ Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

E_1 : « les trois personnes sont du groupe A »

E_2 : « au moins une personne est du groupe sanguin O »

E_3 : « les trois groupes sanguin sont présents »

II/ Les dix personnes sont malades on dispose de trois médecins X, Y et Z.

Chaque malade appelle au hasard un seul médecins.

a/ Montrer que le nombre de cas possibles est : $\text{Card}\,\Omega = 3^{10}$.

b/ Calculer la probabilité des événements suivants :

F_1 : « les 10 malades appellent le même médecin »

F_2 : « le médecin X reçoit exactement 3 appels »

F_3 : « les trois médecins sont appelés »

F_4 : « les personnes du même groupe sanguin appellent le même médecin »

Ex 3.

1) Montrer que $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

2) Soit la suite U définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}$.

a/ Calculer U_1 et U_2.

b/ Montrer que $\forall n \in IN : 0 < U_n < 2$.

c/ Montrer que la suite U est croissante. En déduire que la suite U est convergente.

3) Soit la suite V telle que $\forall n \in IN$: $U_n = 2\cos V_n$; $V_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

a/ Calculer V_0, V_1 et V_2 et vérifier que V_0, V_1 et V_2 sont en progression géométrique.

b/ Montrer que $\forall n \in IN : \cos(V_{n+1}) = \cos(\frac{1}{2}V_n)$. En déduire la nature de la suite V.

c/ Exprimer V_n puis U_n en fonction de n. En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{24}$.

d/ On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{3}{2\pi}V_k - \frac{1}{n}\right)$.

Exprimer S_n en fonction de n et calculer $\lim_{x\to+\infty} S_n$.