DEVOIR SYNTHESE n°2.

03/03/2020

3°M.

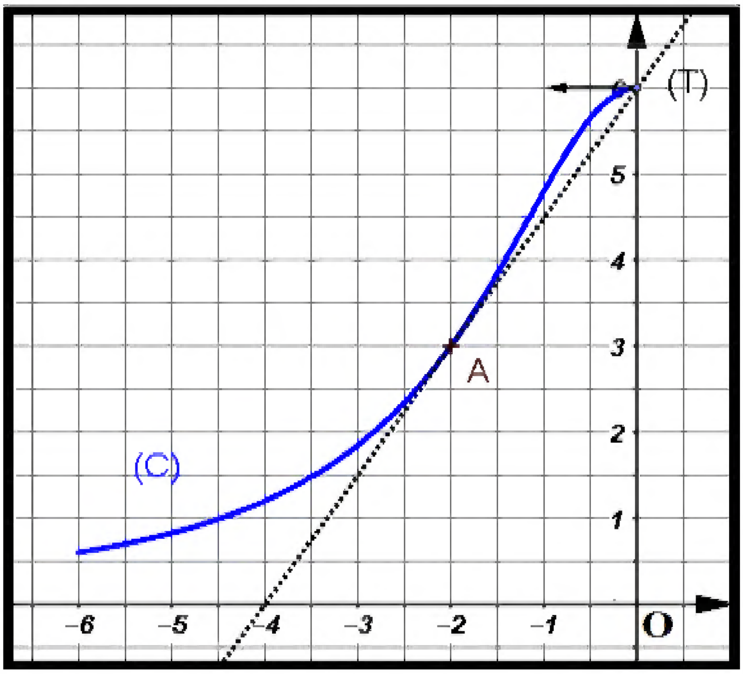
S M A A L I.

Ex I.
4,5

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{I},\vec{J})$,

La courbe représentative (C) suivante est celle d'une fonction f définie sur l'intervalle **[-6,0].**

(**T**) est la tangente à (C) au point A d'abscisse **-2**.



1/ Par une lecture graphique :

a) Donner : **f(-2), f(0) et f '(-2).**

b) Ecrire une équation de la tangente (**T**).

c) Déduire que pour tout x de [-6, 0], $\mathbf{f(x)} \geq \frac{3}{2}\mathbf{x + 6}$.

2/ On suppose que pour tout x de [-6, 0], $\mathbf{f(x)} = \frac{a}{x^2+b}$.

a) Calculer **f '(x)** pour tout x de [-6, 0].

b) Prouver que **a = 24 et b = 4.**

c) Dresser le tableau de variation de f.

3/ Soit M un point de (C) d'abscisse **x** ($x \in [-6, 0[$).

H est le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses.

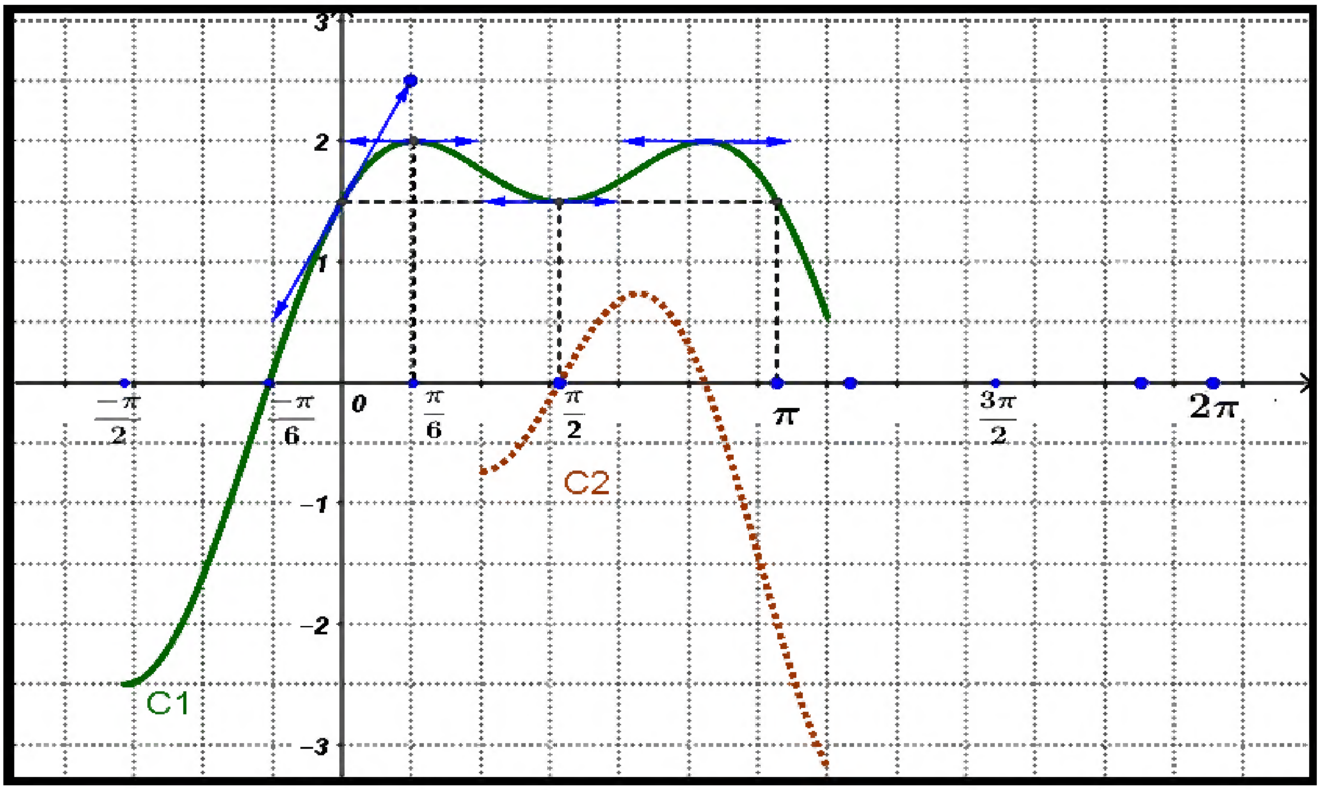
On appelle **g(x)** l'aire du triangle OMH.

a) Exprimer **g(x)** en fonction de **x**, puis étudier les variations de g.

b) Quelle est la position de M sur (C), pour laquelle l'aire du triangle **OMH est maximale** ?

Ex 2. 5,5

Ci-dessous, dans le repère orthonormé $(O,\vec{I},\vec{J})$, **C1** et **C2** sont deux portions de courbes d'une fonction **f** et de sa fonction dérivée **f '** définies, continues et dérivables sur IR.



1/ Justifier que **C1** est la portion de la courbe de **f.**

2/ Par lecture graphique, Déterminer **f(0) ; f '(0) et f ' $(\frac{\pi}{6})$.**

3/ On suppose qu'il existe a, b et c trois constantes réelles tels que, pour tout x de IR ; **f(x) = a cos²x + b sinx + c.**

a) Pour x de IR, Exprimer **f '(x)** en fonction de **x, a et b.**

b) En déduire que **a = b = 2** et que **c** = $-\frac{1}{2}$

4/ Dans la suite, on prendra **f(x) = 2 cos²x + 2 sinx –** $\frac{1}{2}$.

a) Vérifier que f est **2π**-périodique.

b) Vérifier que **f (π-x) = f(x)**, et interpréter graphiquement ce résultat.

c) Déduire que l'on peut restreindre l'étude de f à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

5/a) résoudre dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ l'équation **cosx.(1-2sinx)= 0** puis déduire les solutions de l'inéquation **cosx. (1- 2sinx) < 0.**

b) Dresser le tableau de variations de f sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

c) Recopier le tracé **C1** et compléter la courbe de la restriction de f à $[-\frac{\pi}{2}, 2\pi]$ dans le repère orthonormé $(O,\vec{I},\vec{J})$.

d) Discuter graphiquement, suivant le paramètre réel **m** le nombre de solutions de l'équation **f(x) = m** dans $[-\frac{\pi}{2}, 2\pi]$.

Ex 3. 6	Le plan complexe **P** est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives : $\mathbf{Z_A = 2-2i}$, $\mathbf{Z_B = 2+2i}$, $\mathbf{Z_C = 2}$ **et** $\mathbf{Z_D = 2i}$. **1/a)** Déterminer la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes $\mathbf{Z_A}$ **et** $\mathbf{Z_B}$. **b)** Montrer que : $\frac{Z_B}{Z_A} = i$ **c)** Déduire que le triangle **OAB** est rectangle et isocèle en O. **d)** Vérifier que **C** est le milieu de [AB]. **2/a)** Montrer qu'il existe une unique rotation R qui transforme B en O et O en A. **b)** Préciser l'angle θ de la rotation R. **c)** Vérifier que C est le centre de la rotation R. **d)** soit **(C)** le cercle de diamètre [AB]. On note **Δ** la droite passant par A et parallèle à l'axe $(O,\vec{u})$ et **Δ'** son image par R. Montrer que **Δ'** est tangente à **(C)**. **3/** pour tout point M(z) ϵ **P** \\{B} on associe le point M'(z') avec $\mathbf{z'} = \frac{2z}{z-2i}$ **a)** Déterminer l'ensemble (Γ) = {Mϵ**P** tel que $\mathbf{\vert z'\vert = 2}$}. **b)** Déterminer l'ensemble (Γ') = {Mϵ**P** tel que **z' = z**}. **c)** Montrer que **(z'-2) (z-2i) = 4i** et déduire que si M appartient au cercle $\mathbf{C_{(D,\,2)}}$ alors M' appartient à un cercle **(C')** qu'on précisera.
Ex 4. 4	**1/a)** Montrer que le nombre **101** est premier. **b)** Montrer que : $\mathbf{2021^{100} - 1}$ est divisible par 101. **c)** en déduire le reste de la division euclidienne de $\mathbf{2021^{2000}}$ par 101. **2/**Soit l'équation **(E) : 101x -13y = 10** dans IN². **a)** Vérifier que **(1, 7)** est une solution de (E). **b)** Montrer que si **(x, y)** est une solution de (E) alors **101(x-1)=13(y-7)** **c)** En déduire les solutions de (E). **3/**Soit n un entier naturel tel que le reste de sa division euclidienne par **101** est égal à **2** et celui de sa division euclidienne par **13** est égal à **12.** Déterminer le reste de la division euclidienne de n par **1313**.