DEVOIR SYNTHESE n°1.

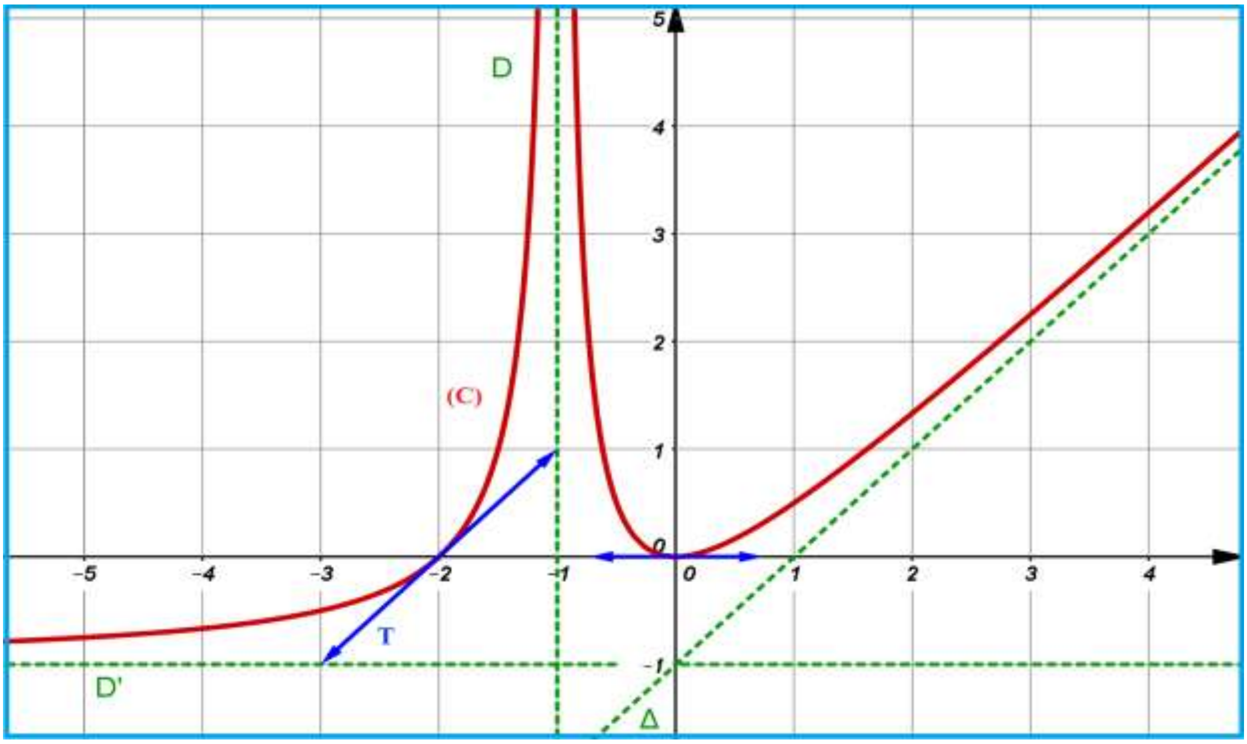
03/12/2019. (2h)

3° M.

S M A A L I.

Ex1. (4)

Soit f une fonction définie et continue sur IR\ {-1}, dont la courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ est la suivante :



La courbe (C) admet :

- une asymptote verticale D
- une asymptote horizontale D'au voisinage de -∞.
- une asymptote Oblique Δ au voisinage de +∞.
- une tangente horizontale au point O.
- une tangente T : y=x+2 au point d'abscisse -2.

En s'aidant du graphique répondre sans justifier aux questions suivantes :

1) Donner les limites de f en - ∞ et + ∞

2) Donner la limite de f en -1

3) Comparer $f\left(\frac{-2\sqrt{2020}+1}{\sqrt{2020}}\right)$ et $f\left(\frac{-2\sqrt{2020}-1}{\sqrt{2020}}\right)$

4) Donner les équations cartésiennes des asymptotes à (C).

5) Déterminer : $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{+\infty} f(x)-x$

6) Déterminer : $\lim_{(-2)^+} \frac{1}{f(x)}$ et $\lim_{-\infty} \frac{-2}{f(x)+1}$

7) Déterminer : f '(-2) et f '(0).

8) Déterminer : f (]-∞,-1[) et f (]-1, +∞ [)

9) Déterminer les solutions de l'équation f ²(x) = -f(x).

Ex2. (7)	Soit f la fonction définie et continue sur IR, par $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 4x & \text{si } -1 \leq x \\ 3x + \sqrt{x^2 + 3} & \text{si } x < -1 \end{cases}$ et (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé$(O, \vec{i}, \vec{j})$. **1)** a) Etudier la dérivabilité de f en − 1. b) Interpréter graphiquement les résultats trouvés. **2)** a) Déterminer $\lim_{+\infty} f(x)$ b) Montrer que (Cf) admet au voisinage de +∞, une branche infinie dont précisera la direction. c) Déterminer $\lim_{-\infty} f(x)$. d) Montrer que la droite Δ: y = 2x est une asymptote oblique à (Cf) au voisinage de −∞. e) Etudier la position relative de (Cf) par rapport à Δ sur]−∞, −1 [. **3)** Soit a un réel de]-∞, −1] . a) Montrer que le nombre dérivé de f en a est $f'(a) = 3 + \frac{a}{\sqrt{a^2+3}}$. b) Déterminer s'il existe un réel a<-1 tel que la tangente à (Cf) au point d'abscisse a soit perpendiculaire à la droite D : 2x − y + 1 = 0.
Ex3. (5)	Dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on considère les points : $A(3\sqrt{3}; 3)$, $B\left[6; -\frac{\pi}{6}\right]$ et $C(4\sqrt{3}; 0)$ **1)** a) Déterminer les coordonnées cartésiennes de B. b) Déterminer les coordonnées polaires de A. **2)** a) Calculer : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et déduire $cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right)$. b) Calculer : $dét(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ et déduire $sin(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})$ c) Quelle est alors la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})$. **3)** a) Placer les points A, B et C puis préciser la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}})$. b) Déduire de ce qui précède qu'il existe un cercle (C) passant par les points O, A, B et C dont on précisera les coordonnées de son centre.
Ex4. (4)	Pour tout réel x, on pose : $h(x) = sin(11\pi - x) - cos3(11\pi + x) - cos(x + \frac{11\pi}{2}) - sin(\frac{11\pi}{2} - x)$. **1)** montrer que h(x)= cosx + cos3x **2)** a) Vérifier que pour tous réels a et b on a : cos (a-b) +cos (a+b)=2.cosa.cosb b) En déduire que : $h(x) = 2.cosx.cos2x$ **3)** a) Montrer que : $sin4x = 2sinx.h(x)$ b) En déduire que : $h(\frac{\pi}{5}) = \frac{1}{2}$ et que $cos(\frac{\pi}{5}).cos(\frac{3\pi}{5}) = -\frac{1}{4}$ **4)** Montrer alors que : $cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ *et* $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$.