MATHEMATIQUES. **SMAALI.**

DEVOIR FINAL. (<u>CORRECTION</u>) 3H.

Le : 06-05-2016. 4°T2.

<u>EXERCICE N°1. (5,5 POINTS) :</u>

1) P = p(D) = p(D1UD2) = p(D1) +p(D2)-p(D1∩D2) = p(D1) +p(D2)-p(D1).p(D2) =…= 0,0494.

2) a- X la v.a. comptant le nombre des lampes défectueuses

X suit la loi binomiale de paramètres n=10 et p=0,0494

La loi de probabilité de X est : $\boxed{p(X=k) = C_{10}^{k}.(0{,}0494)^{k}.(1-0{,}0494)^{10-k} \quad ,k \in \{0;1;2;\dots;10\}}$

b- P (X≥ 1) = 1- p(X=0) = 1- $C_{10}^{0}.(0{,}0494)^{0}.(1-0{,}0494)^{10}$ = 0, 3975

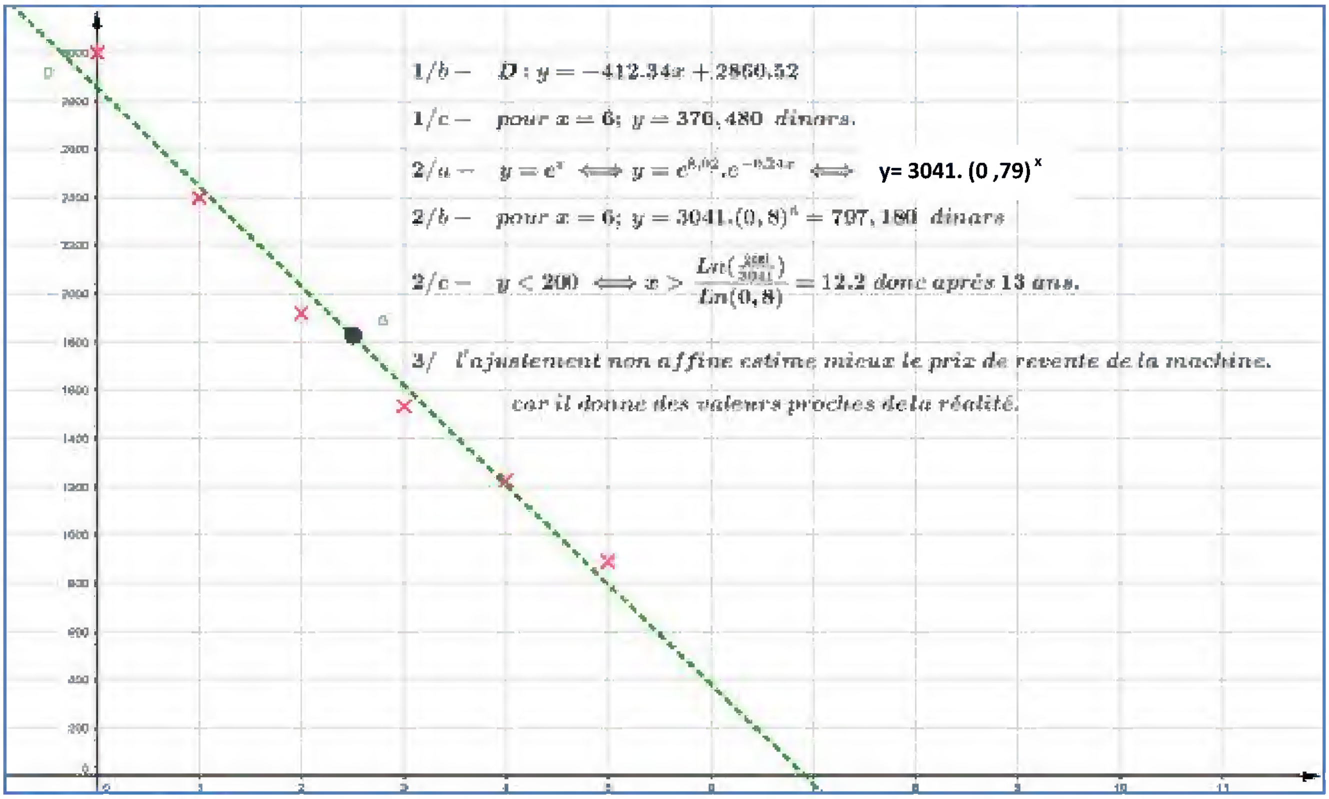
c- E(X)=n.p=0,494

3) a- $P(20 \le T \le 30) = e^{-20.\lambda} - e^{-30.\lambda} = e^{-0,14} - e^{-0,21} = 0{,}0588$

b- p (T=40) = 0

c- $p(T \ge 50 \mid T \ge 20) = p(T \ge 30) = e^{-0,21} = 0{,}8106$

<u>EXERCICE N°2.</u>



<u>EXERCICE N°3.</u>

<u>PARTIE 1.</u>

1/ a- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

b- f(1)=1/e et f '(1)=0

c- le tableau de variation de f est :

x	−∞		1		+∞
f'(x)		+	0	−	
f(x)	−∞	↗	1/e	↘	0

2/ T_0 : y=f '(0) (x-0)+f(0)=x

Car : f'(x)=(1-x)e^{-x} → f'(0)=1et f(0)=0

f(x)-x=x(e^{-x}-1)≤ 0 car :si x>0 ; e^{-x}<1 et si x<0 ;e^{-x}>1

donc : (C) est au dessous de T_0.

<u>Partie 2.</u>

a/ f(x).f (-x) ≤ 0	f(x).f(-x)=xe^{-x}.(-x).e^{x}=-x^2≤0	VRAI
b/ f(x) + f '(x) = 1 - e^{-x}	f(x)+f'(x)=xe^{-x} + (1-x)e^{-x} =e^{-x}.	FAUX
c/ f(x)≤ $\frac{1}{e}$	f(x) ≤f(1)=1/e (tableau de variation)	VRAI
d/ $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$	$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} (1-x)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} - \frac{x}{e^x} = 0$	VRAI

Partie 3 :

1) • $I = \int_0^1 e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}$

• $J = \int_0^1 x\,e^{-2x}\,dx$ avec IPP

Soit $\begin{cases} u'(x) = e^{-2x} \\ v(x) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = -\frac{e^{-2x}}{2} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow J = \left[-\frac{x}{2}e^{-2x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-2x}}{2}\,dx$

$= \frac{-1}{2e^2} + \left[\frac{-e^{-2x}}{4}\right]_0^1$

$= \frac{-1}{2e^2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4e^2}$

$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2}$

2) • $K = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x\,e^{-x}\,dx$ avec IPP

Soit $\begin{cases} u'(x) = e^{-x} \\ v(x) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = -e^{-x} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow K = \left[-x e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx$

$= -\frac{1}{e} + I$

$= 1 - \frac{2}{e}$

• $L = \int_0^1 f^2(x)\,dx$

$= \int_0^1 x^2\,e^{-2x}\,dx$ avec IPP

Soit $\begin{cases} u'(x) = e^{-2x} \\ v(x) = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = \frac{-e^{-2x}}{2} \\ v'(x) = 2x \end{cases}$

$\Rightarrow L = \left[-\frac{x^2}{2}e^{-2x}\right]_0^1 + \int_0^1 x\,e^{-2x}\,dx$

$= \frac{-1}{2e^2} + J$

$= \frac{1}{4} - \frac{5}{4e^2}$

3) l'aire : $\mathcal{A} = \int_0^1 |f(x)|\,dx$

$= \int_0^1 x\,e^{-x}\,dx = K$

$\boxed{\mathcal{A} = 1 - \frac{2}{e}}$ (u.a.)

4) le volume : $V = \pi \int_0^1 f^2(x)\,dx$

$= \pi L$

$\boxed{V = \frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{4e^2}}$ (u.v.)

Partie 4 :

1) a) Par récurrence : $0 < u_0 = 1 \leq 1$

On suppose que $0 < u_n \leq 1$

mq : $0 < u_{n+1} \leq 1$

On a : $0 < u_n \leq 1$

$\Rightarrow f(0) < f(u_n) \leq f(1)$

$0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{e} < 1$

CQFD.

b) $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \leq 0$

Car $f(x) - x \leq 0$ qst° 2 partie 1.

$\longrightarrow (u_n) \searrow$.

c) $(u_n) \searrow$ et minorée par 0 $\Longrightarrow (u_n)$ cvgte

$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ (u_n) \text{ cvge vers } \ell \in [0,1] \\ f \text{ continue sur } [0,1] \end{cases} \longrightarrow f(\ell) = \ell$

$\Rightarrow \cancel{\ell e^{-\ell} = \ell} \Rightarrow \ell(e^{-\ell} - 1) \Longrightarrow \boxed{\ell = 0}$.

2) a) $V_n - V_{n+1} = \ln u_n - \ln u_{n+1} = \ln \frac{u_n}{u_{n+1}}$

$= \ln(e^{u_n}) = u_n$.

b) $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = V_0 - \cancel{V_1} + \cancel{V_1} - \cancel{V_2} + \cdots + \cancel{V_n} - V_{n+1}$

$= V_0 - V_{n+1} = \ln(u_0) - V_{n+1} = 0 - V_{n+1}$

c) $\lim S_n = \lim -V_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} -\ln(u_{n+1})$

or $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0$ et $\lim_{X\to 0^+} -\ln X = +\infty$
$u_{n+1} > 0$

$\longrightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

ANNEXE.