MATHEMATIQUES. **SMAALI.**
DEVOIR FINAL. 3H.
Le : 06-05-2016. 4°T2.

EXERCICE N°1.

Une entreprise fabrique des lampes électriques. (Arrondir les résultats à 10^{-4} prés).
On constate que chaque lampe pouvait présenter deux types de défauts indépendants : un défaut D1 avec une probabilité de **0,03** et un défaut D2 avec une probabilité de **0,02.**
Une lampe est dite défectueuse si elle présente au moins l'un des deux défauts.
Soit l'évènement D : « une lampe défectueuse ».

1) Montrer que la probabilité de D est **p=0,0494.**

2) un quincaillier reçoit un échantillon de **10** lampes pour les tester l'une après l'autre et de manière indépendante et identique. On note par X le nombre des lampes défectueuses.

a- Définir la loi de probabilité de X.
b- calculer la probabilité qu'il ait au moins une lampe défectueuse dans cet échantillon.
c- déterminer <u>le nombre moyen</u> des lampes défectueuses dans cet échantillon.

3) la durée de vie T (en mois), de chaque lampe électrique fabriqué par l'entreprise est une variable aléatoire qui suit la <u>loi exponentielle</u> de paramètre **λ=0,007**

a- calculer la probabilité qu'une telle lampe ait une durée de vie <u>comprise entre</u> 20 et 30 mois.
b- calculer la probabilité qu'une telle lampe ait une durée de vie <u>égale à</u> 1200 jours.
(On suppose qu'un mois est composé de 30 jours)
c- <u>sachant qu</u>'une telle lampe a fonctionné plus de 20 mois, quelle est la probabilité qu'elle ne tombe pas en panne <u>avant</u> de fonctionner <u>encore</u> 30 mois ?

EXERCICE N°2.

Une machine est achetée à 3000 Dinars.
Le prix de revente y (en Dinars), est donné en fonction du nombre x d'années d'utilisation par le tableau suivant :

Nombre d'années d'utilisation : x_i	0	1	2	3	4	5
Prix de revente en Dinars : y_i	3000	2400	1920	1536	1229	893

1/ a- représenter dans un repère orthogonal, le nuage de points M_i (x_i, yi)
(Axe des abscisses : 2 cm pour une année, Axe des ordonnées : 1 cm pour 200 Dinars).
b- donner une équation de la droite de régression D de y en x par la méthode <u>des moindres carrés</u>. Puis <u>représenter</u> la droite D dans le repère précédent. (Arrondir les coefficients à 10^{-2} prés)
c- quelle est le prix de revente de la machine après 6 années d'utilisation ?

2/ dans cette partie on considère un ajustement non affine en posant : $\mathbf{z = Ln(y)}$.
On admet qu'une équation de la droite de régression de z en x est donnée par :

$$\mathbf{z = -0,24\,x + 8,02}$$

a- déterminer une expression de y en fonction de x de la forme **$y=A.B^x$** où A est un réel arrondi à l'unité et B est un réel arrondi au centième.
b- on admet que **$y=3041.(0,8)^x$**, <u>Répondre **alors**</u>, à la question 1/c.
c- après combien d'années le prix de revente de la machine sera inférieure à 200 dinars ?

3/ En réalité, après 6 années d'utilisation, la machine est revendu à 700 Dinars.
Lequel des deux ajustements précédents, celui qui semble le mieux estimant le prix de revente de la machine ? Expliquer.

EXERCICE N°3.

Soit f la fonction définie sur IR par : $\boxed{f(x) = xe^{-x}}$

Et (C) sa courbe représentative dans un RON (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$). Voir annexe.

PARTIE 1.

1/ par une lecture graphique déterminer :

a- $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

b- f(1) et f '(1)

c-dresser le tableau de variation de f.

2/ étudier la position de la courbe (C) de f par rapport à sa tangente T au point d'abscisse 0.

PARTIE 2.

Répondre par VRAI ou par FAUX, avec justification :

a/ $f(x).f(-x) \leq 0$

b/ $f(x) + f'(x) = 1 - e^{-x}$

c/ $f(x) \leq \frac{1}{e}$

d/ $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$

PARTIE 3.

1/ calculer les intégrales : **I=** $\int_0^1 e^{-x}\,dx$ et **J=**$\int_0^1 x.e^{-2x}\,dx$

2/ déduire les valeurs de : **K=**$\int_0^1 f(x)\,dx$ et **L=**$\int_0^1 f(x)^2\,dx$

3/ calculer l'aire de la partie **P** du plan délimité par (C) et les droites d'équations **x=0, x=1 et y=0**.

4/ calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation de **P** autour de l'axe (o,$\vec{i}$).

PARTIE 4.

On considère la suite U_n définie sur IN par: $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n), \ n \in IN. \end{cases}$

1/ **a-**montrer que **:** $0 < U_n \leq 1$.

b-montrer que la suite U_n est décroissante.

c- déduire que : U_n est convergente et déterminer sa limite.

2/Soit $V_n = Ln(U_n)$, $n \geq 0$ et $S_n = U_0 + U_1 + \ldots\ldots + U_n$, $n \geq 0$

a-montrer que : $U_n = V_n - V_{n+1}$

b-Montrer que : $S_n = -V_{n+1}$, $n \geq 0$.

c-Déterminer alors, la limite de S_n

ANNEXE.