DEVOIR DE MAISON SEMESTRE 1.

2016/2017

4°sc. T E C H.

S M A A L I.

EXERCICE N°1.

On pose: pour tout réel x : $f(x)=\sqrt{x^2+1}-2x+1$

(C) est la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1: Justifiez que $f(x)$ est bien défini pour tout réel x.

2: Calculez la fonction dérivée de f, $f'(x)$.

Montrez que pour $x < 0$, on a : $f'(x) < 0$.

Montrez que pour $x \geq 0$, on a : $f'(x) < 0$.

Donnez alors le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3: Montrez que pour tout $x < 0$, on a : $f(x)+3x-1=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$

Déterminez alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+3x-1$. Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?

4: Montrez que pour tout $x > 0$, on a: $f(x)+x-1=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

Déterminez alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+x-1$. Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?

5: Tracez l'allure de la courbe de f ainsi que les droites d'équation "$y= -3x+1$" et "$y= -x+1$". (On admet que la courbe de f est située au-dessus de ces deux droites)

EXERCICE N°2.

Soit f la fonction définie sur $I=]0;4[$ par $f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}}$ et C_f désigne la courbe représentati f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)a) Montrer que f est dérivable sur I et calculer $f'(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f .

2)a) Déterminer l'équation de la tangente T à C_f au point $A(2;0)$.

b) Tracer C_f et T .

3)a) Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J à préciser.

b) Résoudre $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$.

4) Tracer la courbe C' de f^{-1} dans le même repère que celui de C_f .

EXERCICE N°3.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-4(1+i)z-4+8i=0$.

2) Soit dans l'équation (E) : $z^3-2(3+2i)z^2+4(1+4i)z+8-16i=0$.

a) Vérifier que 2 est une solution de (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

3) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, u, v).

on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $a=2$, $b=2i$ et $c=4+2i$.

a) Placer les points A, B et C.

b) Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

4) Soit θ un réel appartenant à $[0,2\pi[$; Γ l'ensemble des point M d'affixes $2+2\sqrt{2}e^{i\theta}$

a) Déterminer la forme exponentielle de $c-a$ et en déduire que $C\in\Gamma$.

b) Déterminer et construire Γ.

EXERCICE N°4.

Soit f la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{2}}$

1) a/ Etudier la dérivabilité de f à droite en (-1).

b/ Montrer que pour tout $x\in]-1, +\infty[$, $f'(x)=\frac{1}{4f(x)}$

c/ En déduire le sens de variation de f.

d/ Montrer que pour tout $x\in[0,1]$, $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$

2) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=0$ et $u_{n+1}=f(u_n)$

a/ Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leq u_n\leq 1$

b/ Montrer à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que : $|u_{n+1}-1|\leq\frac{1}{2}.|u_n-1|$

c/ Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_n-1|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$ d/ En déduire la limite de (u_n).

EXERCICE N°5.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ $P_m : mx+2y-m^2z+3=0$; $m\in\mathbb{R}$.

1°) a- Déterminer les plans P_m passant par le point $A(2,0,1)$.

b- Déterminer $P_{-1}\cap P_1$.

c- Montrer que tous les plans P_m passant par un point fixe B.

d- Déterminer suivant les valeurs de m la position de (AB) et P_m.

2°) Soit Δ la droite passant par B et de vecteur directeur $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

a- Montrer que (OA) et Δ ne sont pas coplanaires.

b- Soit Q le plan contenant la droite (OA) et parallèle à Δ.

Déterminer une équation cartésienne du plan Q.

c- Déterminer m pour que les plans Q et P_m soient parallèles.