DEVOIR SYNTHESE 1.

2016/2017
4°sc. TECH.
SMAALI.

EXERCICE N°1. (5 PTS)

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les droites D et D' de représentation paramétriques:

$$D:\begin{cases} x=-1-2\alpha \\ y=2-\alpha \\ z=-2+3\alpha \end{cases} ;\quad \alpha\in\mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad D':\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=5-\lambda \\ z=1-3\lambda \end{cases} ;\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

1°) les droites D et D' sont-elles coplanaires ?

2°) Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par le point $A(0,-1,2)$ et parallèle à D et à D'.

3°) soit m un réel.

On considère l'ensemble (P_m) des points $M(x,y,z)$ de l'espace vérifiant

$$(-m+1)x+2(m+2)y-(m+1)z+1=0.$$

a/ Montrer que, pour tout réel m, on a : P_m est un plan.

b/ Déterminer $P_2 \cap P$.

4°) a/ Déterminer m pour que D soit parallèle à P_m.

b/ Dans le cas ou D n'est pas parallèle à P_m

Déterminer les coordonnées du point I_m d'intersection de D et P_m.

EXERCICE N°2. (5 PTS)

1) on note $z_1=\dfrac{-\sqrt{5}-i}{2}$ et $z_2=\dfrac{\sqrt{5}-i}{2}$

a/calculer (z_1+z_2) et $(z_1\times z_2)$

b/ Résoudre dans C, l'équation (E) : $2z^2+2iz-3=0$

c/ Vérifier que : $|z_1| = |z_2| = \sqrt{\frac{3}{2}}$

2) Soit l'équation (T) : $2z^3-z+3i=0$

a/ montrer que (T) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

b) déterminer les nombres complexes a, b et c vérifiant :

$$2z^3 - z + 3i = (z - z_0)(a\,z^2 + b\,z + c)$$

c) Résoudre alors, l'équation (T).

3) le plan complexe est rapporté à un R.O.N $(O,\vec{i},\vec{j})$

On note M_0, M_1 et M_2 les points d'affixes respectifs $-z_0$, z_1 et z_2.

a/ Montrer que $OM_1M_0M_2$ soit un parallélogramme.

b/ Déduire que $OM_1M_0M_2$ est un Losange.

EXERCICE N°3. (10 PTS)

Soit la fonction f définie continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont on donne (C') une partie de sa représentation graphique sur $[0, 1]$. (C') admet au point $O\,(0, 0)$ une tangente T qui passe par le point $A\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

PARTIE 1. (5 pts.)

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$U_0=0{,}2$ et $U_{n+1}=f(U_n)$ pour tout entier naturel n.

1) a/ sur le graphique (figure 1) placer les trois premier termes de la suite (U_n) sur l'axe des abscisses.

b/ quelles conjectures peut-on émettre concernant la monotonie et la convergence de (U_n) ?

2) Par une lecture graphique :

a/ déterminer : $f(1)$, $f(0)$ et $f'(0)$

b/ préciser les solutions dans $[0, 1]$ de l'équation $f(x)=x$.

c/ préciser le sens de variation de f sur $[0, 1]$.

d/ donner : $f([0, 1])$.

3) a/ montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n \in [0, 1]$.

b/ étudier la monotonie de la suite (U_n).

c/ déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

PARTIE 2. (5 pts.)

Sachant que $f(x)=\dfrac{ax+b}{c+x^2}$ où a, b et c sont des réels.

1) a/ donner l'expression de $f'(x)$ en fonction de a, b et c.

b/ en utilisant 2) a/ de la partie 1. justifier qu'on a : $a=2$, $b=0$ et $c=1$.

2) a/ dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

b/ compléter la courbe (C) de f (figure 2) en précisant les éléments remarquables (: les asymptotes, les tangentes,...)

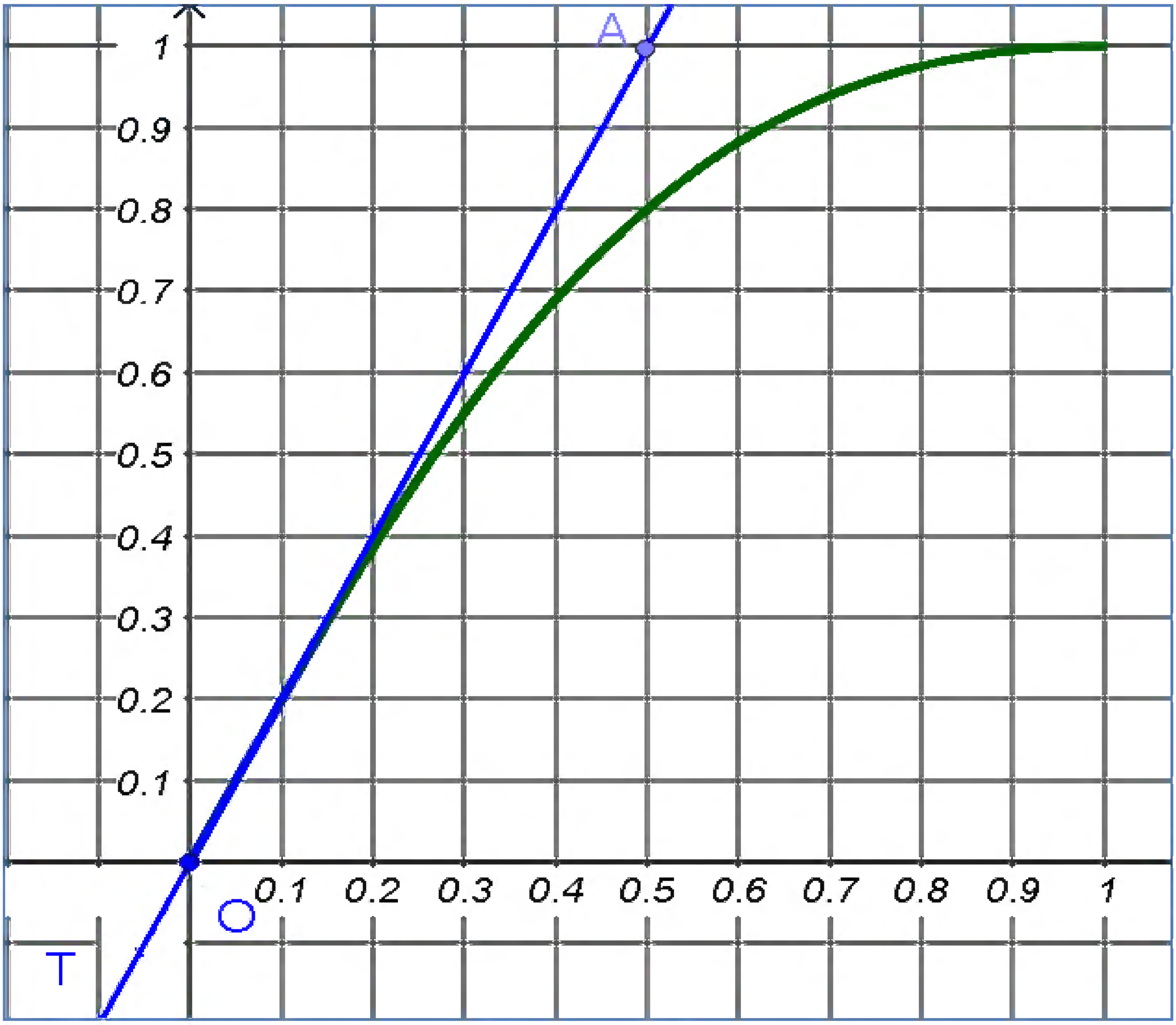
3) soit g la restriction de f à l'intervalle $[-1, 1]$.

a/ montrer que g admet une fonction réciproque h définie sur $[-1, 1]$.

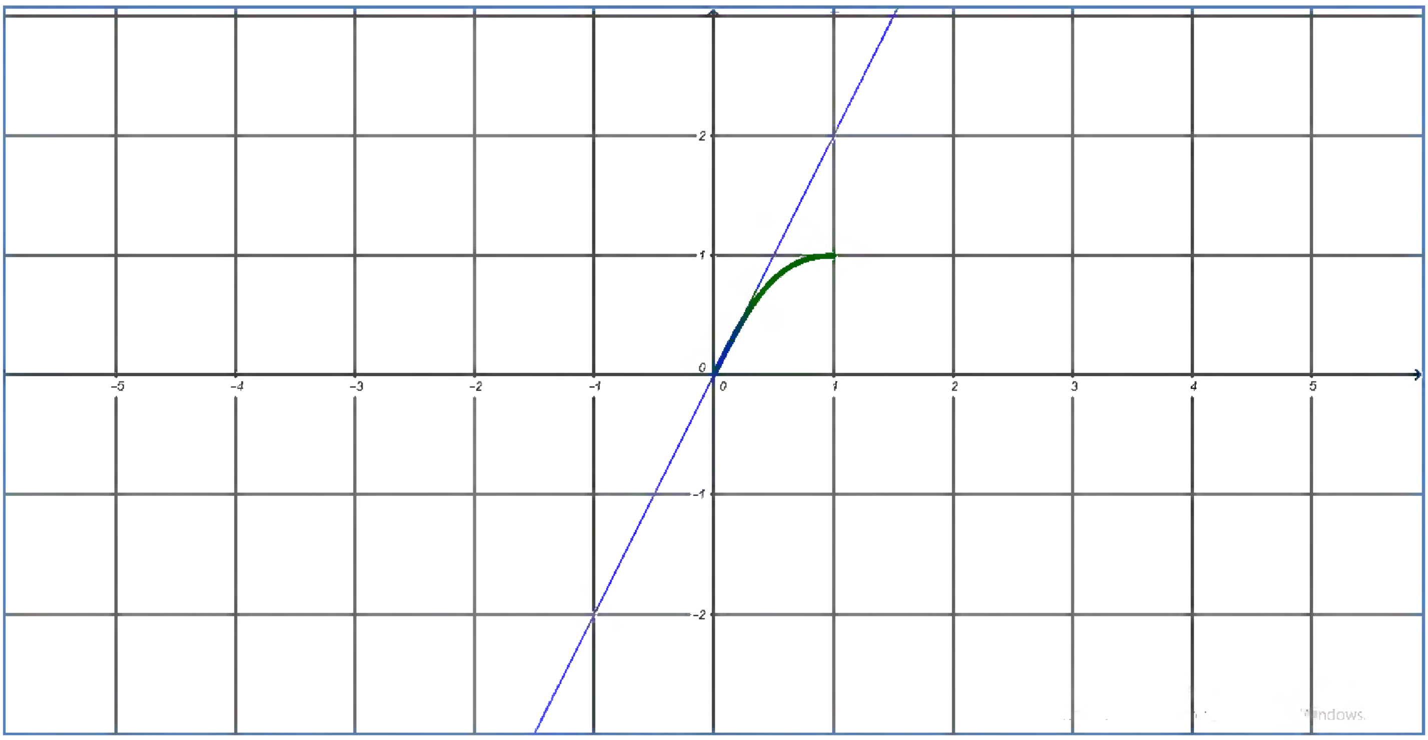
b/ montrer que h est dérivable en 0 et déterminer $h'(0)$.

c/ h est-elle dérivable en 1 ? justifier.

d) tracer la courbe (Γ) de h (sur la figure 2).



(Figure 1).



(Figure 2).