DEVOIR CONTROLE 1.

15 / 10 / 2016. (2 H).

4°sc. T E C H. 3.

S M A A L I.

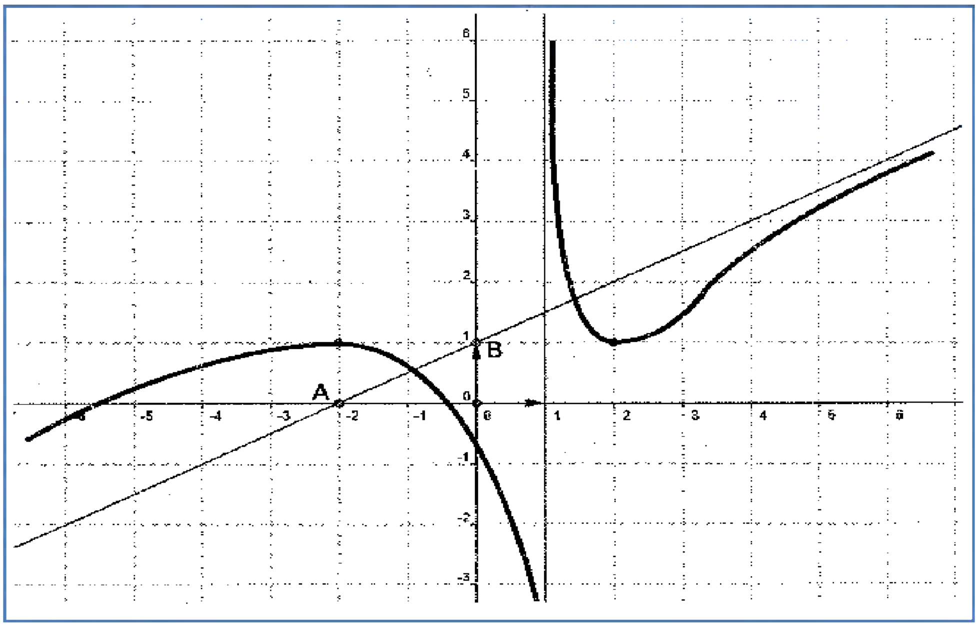
EXERCICE. N°1: (4 PTS = 8*0,5).

Dans le graphique ci-contre, on a tracé la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

et admettant : - la droite d'équation $x = 1$, comme asymptote verticale.

- la droite (AB) : $y = \frac{1}{2}x + 1$, comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

- une branche parabolique de direction (AB) au voisinage de $-\infty$.



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	L1
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	L2
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$	L3
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$	L4
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - \frac{x}{2}$	L5
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \frac{x}{2}$	L6
$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$	L7
$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$	L8

a	0
b	1
c	½
d	$-\infty$
e	$+\infty$
f	-1

Relier chaque limite par sa valeur, sans aucune justification.

EXERCICE. N°2: (5 PTS =5*1).

Soit la fonction f définie sur IR^* par : $\begin{cases} f(x) = x\left(2-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) & \text{si} \quad x<0 \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

1/ Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

2/ Montrer que : $\forall\, x < 0$, on a $3x \le f(x) \le x$ et déduire $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

3/ Justifier que f est prolongeable par continuité en 0 et donner son prolongement g.

4/ Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ .Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

5/ Justifier que $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)-x = -\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.

EXERCICE. N°3: (5 PTS =5*1).

Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{\sqrt{1+U_n{}^2}} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n \le 1$.
2) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.
3) Montrer que la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \dfrac{1}{U_n{}^2}$ est une suite arithmétique.
4) Ecrire V_n en fonction de n et donner sa limite.
5) Déduire l'expression de U_n en fonction de n.

EXERCICE. N°4: (6 PTS = 6*1).

Soit le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1) Donner la forme exponentielle de j.

2) Vérifier que : $j^2 = \overline{j} = \dfrac{1}{j}$ et que : $j^3 = 1$.

3) Montrer que $1+j+j^2 = 0 = 1+j^{2017}+j^{2018}$

4) Dans un RON$(O,\vec{u},\vec{v})$ placer les points $A(1)$, $B(j)$, $C(j^2)$ et $I = A*C$

5) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

6) Montrer que l'ensemble des points $M(z)$ tel que $|z-1| = |z-j^2|$ est la droite (IB).

DEVOIR CONTROLE 1.

15 / 10 / 2016. (2 H).

4°sc. TECH. 3.

SMAALI.

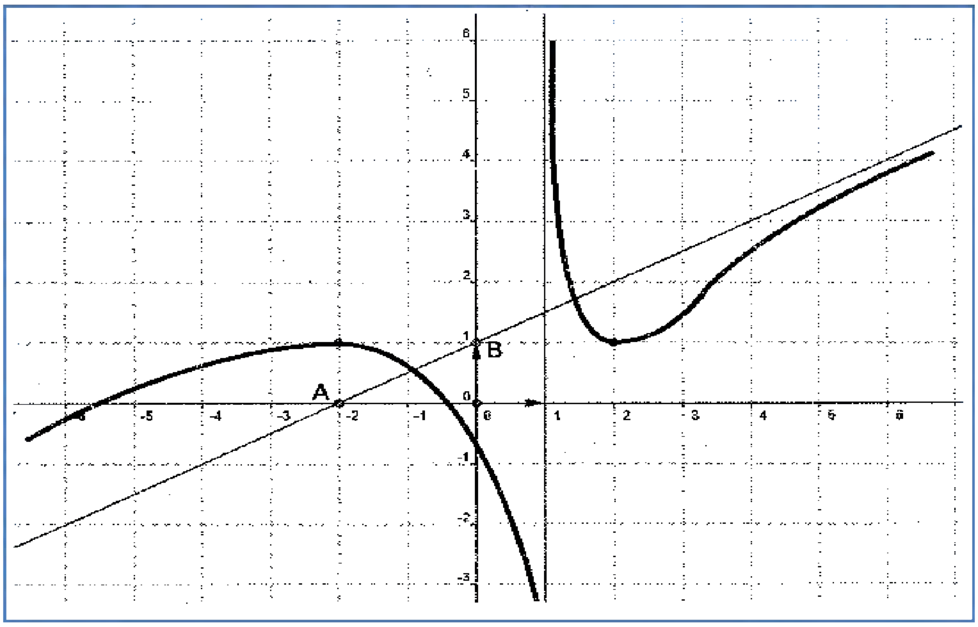
EXERCICE. N°1: (4 PTS = 8*0,5).

Dans le graphique ci-contre, on a tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

et admettant : - la droite d'équation $x = 1$, comme asymptote verticale.

- la droite (AB) : $y = \frac{1}{2}x + 1$, comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

- une branche parabolique de direction (AB) au voisinage de $-\infty$.



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	L1
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	L2
$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$	L3
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$	L4
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - \dfrac{x}{2}$	L5
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \dfrac{x}{2}$	L6
$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$	L7
$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$	L8

a	0
b	1
c	½
d	$-\infty$
e	$+\infty$
f	-1

Relier chaque limite par sa valeur, sans aucune justification.

EXERCICE. N°2: (5 PTS =5*1).

Soit la fonction f définie sur IR^* par : $\begin{cases} f(x)=x\left(2-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) & \text{si} \quad x<0 \\ f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

1/ Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}=0$$

2/ Montrer que : $\forall\ x<0$, on a $3x\le f(x)\le x$ et déduire $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

* On a: $-1\le \sin(1/x)\le 1$ sig $1\le 2-\sin(1/x)\le 3$

Donc: $3x\le f(x)\le x$ (car $x<0$.)

* on a : $\lim\limits_{x\to 0^-} 3x=\lim\limits_{x\to 0^-} x=0$ donc, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$.

3/ Justifier que f est prolongeable par continuité en 0 et donner son prolongement g.

$\left.\begin{array}{l} \text{* } f \text{ n'est pas définie en } 0. \\ \text{* } \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0 \end{array}\right\}$ Donc f est prolongeable par continuité en 0.

Et son prolongement g est donné par : $\begin{cases} g(x)=x\left(2-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) & \text{si} \quad x<0 \\ g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si} \quad x>0 \\ g(0)=0 \end{cases}$

4/ Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ .Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}\right)}=1$$

→⇨ La courbe de f admet au voisinage de $+\infty$ une Asymptote Horizontale d'éq° $y=1$.

5/ Justifier que $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)-x=-\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)-x=\lim_{x\to -\infty} x(2-\sin(1/x))-x=\lim_{x\to -\infty} x(1-\sin(1/x))=-\infty$$

→⇨ La droite d'éq° $y=x$ est une Asymptote Oblique à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

EXERCICE. N°3: (5 PTS =5*1).

Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{\sqrt{1+U_n^2}} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < U_n \leq 1$.

* pour le premier terme : $0 < U_0 \leq 1 \rightarrow$ la proposition est vraie

* supposons que $0 < U_n \leq 1$ et montrons que $0 < U_{n+1} \leq 1$??

* si $U_n > 0$ alors $U_{n+1} > 0$

Or, on sait que $\sqrt{1+U_n^2} \geq U_n$ donc $U_{n+1} \leq 1$

D'après le principe de récurrence : $0 < U_n \leq 1$ pour tout entier n.

2) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

$$U_{n+1} - U_n = U_n\left(\frac{1}{\sqrt{1+U_n^2}} - 1\right) = U_n\left(\frac{1-\sqrt{1+U_n^2}}{\sqrt{1+U_n^2}}\right)$$

Or, $\sqrt{1+U_n^2} \geq 1$ Donc $U_{n+1} - U_n \leq 0$ par suite (U_n) est décroissante .

3) Montrer que la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \dfrac{1}{U_n^2}$ est une suite arithmétique.

$V_{n+1} - V_n = \dfrac{1}{U_{n+1}^2} - \dfrac{1}{U_n^2} = \dfrac{1+U_n^2}{U_n^2} - \dfrac{1}{U_n^2} = 1$ Alors V est une suite Arithmétique de raison $r=1$ et de premier terme $V_0 = 1$

4) Ecrire V_n en fonction de n et donner sa limite.

$V_n = V_0 + n.\ r = 1+n$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} V_n = +\infty$

5) Déduire l'expression de U_n en fonction de n.

$U_n = \dfrac{1}{\sqrt{V_n}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+n}}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

EXERCICE. N°4: (6 PTS = 6*1).

Soit le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1) Donner la forme exponentielle de j.

$$j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

2) Vérifier que : $j^2 = \overline{j} = \frac{1}{j}$ et que : $j^3 = 1$.

* $j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ * $\overline{j} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

* $\frac{1}{j} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ * $j^3 = e^{3i\frac{2\pi}{3}} = e^{i2\pi} = 1$

3) Montrer que $1 + j + j^2 = 0 = 1 + j^{2017} + j^{2018}$

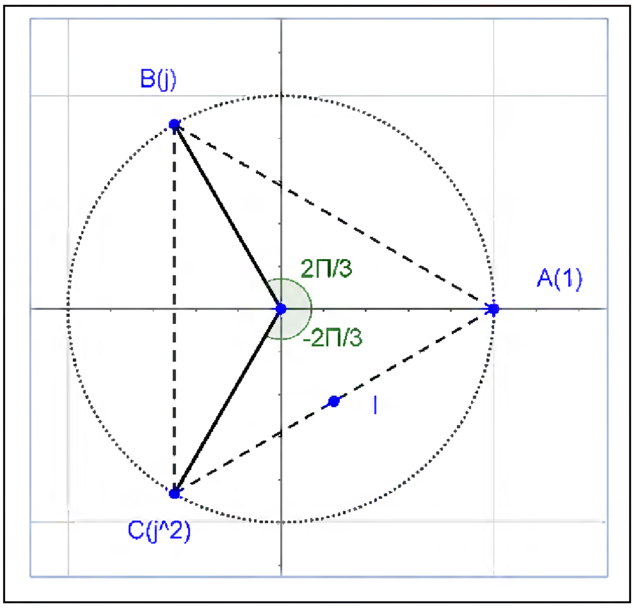
$$1 + j + j^2 = 1 + j + \overline{j} = 1 + 2.\mathcal{R}é(j) = 1 + (-1) = 0$$

on a : $1 + j + j^2 = 0$ donc $j^{2016}(1 + j + j^2) = 0$

Alors $j^{2016} + j^{2017} + j^{2018} = 0$

or $j^{2016} = (j^3)^{672} = 1 \Rightarrow 1 + j^{2017} + j^{2018} = 0$

4) Dans un $RON(O, \vec{u}, \vec{v})$ placer les points $A(1)$, $B(j)$, $C(j^2)$ et $I = A*C$



5) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

* $AB = |Z_B - Z_A| = |j-1| = |-3/2 + i\sqrt{3}| = \sqrt{21}/2$.

* $AC = |Z_C - Z_A| = |j^2-1| = |-3/2 - i\sqrt{3}| = \sqrt{21}/2$.

* $BC = |Z_C - Z_B| = |j(j-1)| = |j|.|j-1|$

$= 1.(\sqrt{21}/2) = \sqrt{21}/2$.

Donc ABC est équilatéral.

6) Montrer que l'ensemble des points $M(z)$ tel que $|z-1| = |z - j^2|$ est la droite (IB).

$|z-1| = |z-j^2|$ sig $AM=CM$ sig $M \in$ med $[AC]$ sig $M \in (IB)$.