DEVOIR CONTROLE 1.

15 / 10 / 2016. (2 H).

4°sc. T E C H. 5.

S M A A L I.

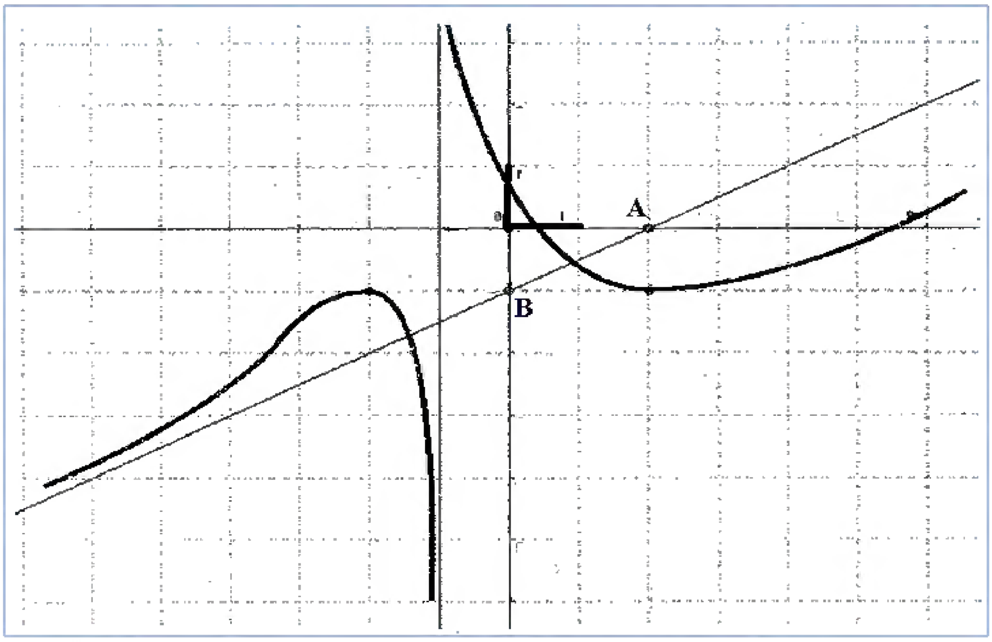
EXERCICE. N°1: (4 PTS = 8*0,5).

Dans le graphique ci-contre, on a tracé la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

et admettant : - la droite d'équation $x = -1$, comme asymptote verticale.

- la droite (AB) : $y = \frac{1}{2}x - 1$, comme asymptote oblique au voisinage de $-\infty$.

- une branche parabolique de direction (AB) au voisinage de $+\infty$.



$\lim_{x\to -1^-} f(x)$	L1
$\lim_{x\to -1^+} f(x)$	L2
$\lim_{x\to +\infty} f(x)$	L3
$\lim_{x\to -\infty} f(x)$	L4
$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x}$	L5
$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$	L6
$\lim_{x\to -\infty} f(x) - \frac{x}{2}$	L7
$\lim_{x\to +\infty} f(x) - \frac{x}{2}$	L8

a	0
b	1
c	½
d	$-\infty$
e	$+\infty$
f	-1

Relier chaque limite par sa valeur, sans aucune justification.

EXERCICE. N°2: (5 PTS =5*1).

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\begin{cases} f(x) = 2x\left(1-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) & \text{si} \quad x<0 \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2+1}-1}{x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

1/ Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

2/ Montrer que : $\forall\ x < 0$, on a $4x \leq f(x) \leq 0$ et déduire $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

3/ Justifier que f est prolongeable par continuité en 0 et donner son prolongement g.

4/ Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ .Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

5/ Justifier que $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)-2x+2 = 0$ et interpréter graphiquement ce résultat.

EXERCICE. N°3: (5 PTS =5*1).

Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 1} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 < U_n \leq \sqrt{2}$.
2) Montrer que la suite (U_n) est croissante.
3) Montrer que la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = u_n^2 - 2$ est une suite géométrique.
4) Ecrire V_n en fonction de n et donner sa limite.
5) Déduire l'expression de U_n en fonction de n.

EXERCICE. N°4: (6 PTS = 6*1).

Soit le nombre complexe $a = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1) Donner la forme exponentielle de a.

2) Vérifier que : $a^2 = \bar{a} = \dfrac{1}{a}$ et que : $a^3 = 1$.

3) Montrer que $1+a+a^2 = 0 = 1+a^{2017}+a^{2018}$

4) Dans un RON$(O,\vec{u},\vec{v})$ placer les points $A(1)$, $B(a)$, $C(a^2)$ et I=A*B

5) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

6) Montrer que l'ensemble des points $M(z)$ tel que $|z-1| = |z-a|$ est la droite (IC).

DEVOIR CONTROLE 1.

15 / 10 / 2016. (2 H).

4°sc. TECH. 5.

SMAALI.

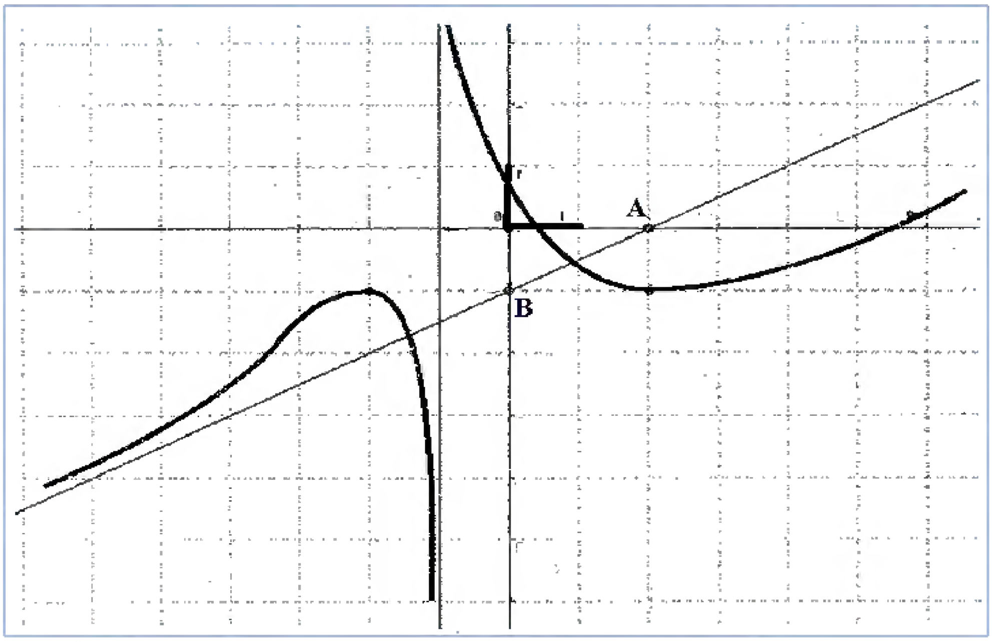
EXERCICE. N°1: (4 PTS = 8*0,5).

Dans le graphique ci-contre, on a tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur $IR \setminus \{-1\}$

et admettant : - la droite d'équation $x = -1$, comme asymptote verticale.

- la droite (AB) : $y = \frac{1}{2}x - 1$, comme asymptote oblique au voisinage de $-\infty$.

- une branche parabolique de direction (AB) au voisinage de $+\infty$.



$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$	L1
$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$	L2
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$	L3
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$	L4
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$	L5
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$	L6
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - \frac{x}{2}$	L7
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - \frac{x}{2}$	L8

a	0
b	1
c	½
d	$-\infty$
e	$+\infty$
f	-1

Relier chaque limite par sa valeur, sans aucune justification.

EXERCICE. N°2: (5 PTS =5*1).

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\begin{cases} f(x)=2x\left(1-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) & \text{si} \quad x<0 \\ f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2+1}-1}{x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

1/ Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{4x^2+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{4x}{\sqrt{x^2+1}+1}=0$$

2/ Montrer que : $\forall\ x<0$, on a $3x\le f(x)\le x$ et déduire $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

* On a: $-1\le \sin(1/x)\le 1$ sig $0\le 1-\sin(1/x)\le 2$

Donc: $4x\le f(x)\le 0$ (car $x<0$.)

* on a : $\lim\limits_{x\to 0^-} 4x=\lim\limits_{x\to 0^-} 0=0$ donc, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$.

3/ Justifier que f est prolongeable par continuité en 0 et donner son prolongement g.

* f n'est pas définie en 0.

* $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$

Donc f est prolongeable par continuité en 0.

Et son prolongement g est donné par : $\begin{cases} g(x)=2x\left(1-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) & \text{si} \quad x<0 \\ g(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2+1}-1}{x} & \text{si} \quad x>0 \\ g(0)=0 \end{cases}$

4/ Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}-1}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}+1}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{4x}{x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}\right)}=2$$

→⇨ La courbe de f admet au voisinage de $+\infty$ une Asymptote Horizontale d'éq° $y=2$.

5/ Justifier que $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)-2x+2=0$ et interpréter graphiquement ce résultat.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)-2x+2=\lim_{x\to -\infty} 2x\left(1-\sin(1/x)\right)-2x+2$$

$$=\lim_{x\to -\infty} -2x.\sin(1/x)+2=\lim_{x\to -\infty} -2.\frac{\sin(1/x)}{1/x}+2=0.$$

⇨ La droite d'éq° $y=2x-2$ est une Asymptote Oblique à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

EXERCICE. N°3: (5 PTS =5*1).

Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 1} \end{cases}$ $, \forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 < U_n \leq \sqrt{2}$.

* pour le premier terme : $0 < U_0 \leq 1$ → la proposition est vraie

* supposons que $1 < U_n \leq \sqrt{2}$ et montrons que $1 < U_{n+1} \leq \sqrt{2}$??

* $1 < U_n \leq \sqrt{2}$ sig $\frac{1}{2} < \frac{1}{2} U_n^2 \leq 1$ sig $\sqrt{3/2} < U_{n+1} \leq \sqrt{2}$

D'après le principe de récurrence : $0 < U_n \leq 1$ pour tout entier n.

2) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

Comparons $U_{n+1}{}^2$ et $U_n{}^2$:

$U_{n+1}{}^2 - U_n{}^2 = \frac{1}{2} U_n{}^2 + 1 - U_n{}^2 = 1 - \frac{1}{2} U_n^2 > 1$ donc $U_{n+1}{}^2 > U_n{}^2 \Rightarrow U_{n+1} > U_n$

Par suite (U_n) est croissante.

3) Montrer que la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = u_n^2 - 2$ est une suite géométrique.

$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+1}{}^2 - 2}{U_n{}^2 - 2} = \frac{\frac{1}{2}U_n{}^2 - 1}{U_n{}^2 - 2} = \frac{1}{2}$ Alors V est une suite Géométrique de raison $q=1/2$

et de premier terme $V_0 = -1$

4) Ecrire V_n en fonction de n et donner sa limite.

$V_n = V_0 . q^n = (-1).\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{-1}{2^n}$ Et $\lim_{x \to +\infty} V_n = 0$

5) Déduire l'expression de U_n en fonction de n.

$U_n = \sqrt{V_n + 2} = \sqrt{-\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2} =$ et $\lim_{n \to +\infty} U_n = \sqrt{2}$

EXERCICE. N°4: (6 PTS = 6*1).

Soit le nombre complexe $a = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1) Donner la forme exponentielle de a.

$$a = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

2) Vérifier que : $a^2 = \bar{a} = \frac{1}{a}$ et que : $a^3 = 1$.

* $a^2 = e^{-i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ * $\bar{a} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

* $\frac{1}{a} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ * $a^3 = e^{-3i\frac{2\pi}{3}} = e^{-i2\pi} = 1$

3) Montrer que $1 + a + a^2 = 0 = 1 + a^{2017} + a^{2018}$

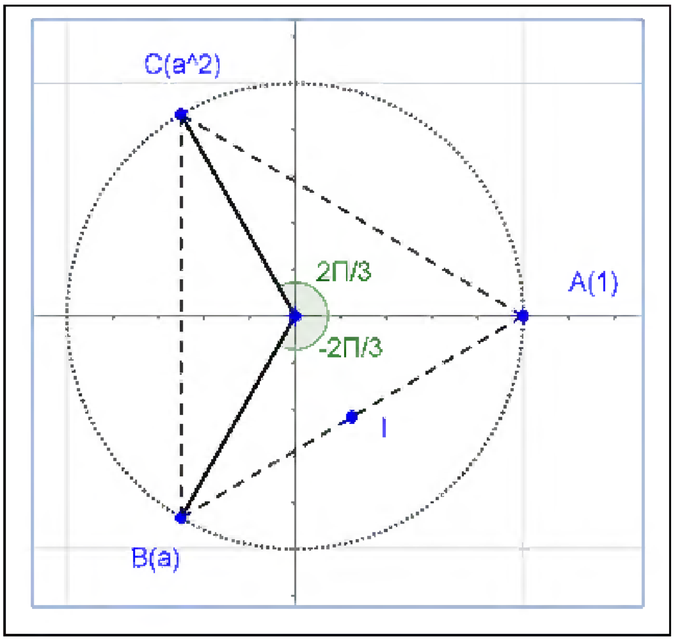
$1 + a + a^2 = 1 + a + \bar{a} = 1 + 2.\text{Ré}(a) = 1 + (-1) = 0$

on a : $1 + a + a^2 = 0$ donc $a^{2016}(1 + a + a^2) = 0$

Alors $a^{2016} + a^{2017} + a^{2018} = 0$

or $a^{2016} = (a^3)^{672} = 1 \Rightarrow 1 + a^{2017} + a^{2018} = 0$

4) Dans un RON$(O, \vec{u}, \vec{v})$ placer les points $A(1)$, $B(a)$, $C(a^2)$ et $I = A*B$



5) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

* $AB = |Z_B - Z_A| = |a - 1| = |-3/2 - i\sqrt{3}| = \sqrt{21}/2$.

* $AC = |Z_C - Z_A| = |a^2 - 1| = |-3/2 + i\sqrt{3}| = \sqrt{21}/2$.

* $BC = |Z_C - Z_B| = |a(a-1)| = |a| . |a-1|$

$= 1.(\sqrt{21}/2) = \sqrt{21}/2$.

Donc ABC est équilatéral.

6) Montrer que l'ensemble des points $M(z)$ tel que $|z - 1| = |z - a|$ est la droite (IC).

$|z-1| = |z-a|$ sig $AM = BM$ sig $M \in$ med $[AB]$ sig $M \in (IC)$.