DEVOIR CONTROLE 3.
2016/2017
4°sc. TECH.
SMAALI.

EXERCICE N°1.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère la sphère S d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.

et le plan P : $2x + y + 2z + 5 = 0$.

1) Déterminer les coordonnées du centre A de la sphère S ainsi que son rayon R.

2) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et perpendiculaire à P.

3) Montrer que P et S sont sécants suivant un cercle (ζ) dont on précisera les coordonnées du centre I et le rayon r.

4) Soit D la droite dont une représentation paramétrique est

$$D : \begin{cases} x = t \\ y = t - 4, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -t - 2 \end{cases}$$

a) Déterminer les coordonnées du point J intersection de Δ et D.

b) Calculer la distance du point J au plan P.

c) Donner une équation de la sphère S' de centre J et contenant (ζ).

EXERCICE N°2.

A) Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = 1 - \ln x - x^2$.

1) Dresser le tableau de variation de g.

2) Calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$.

B) Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = -x + \frac{\ln x}{x}$

On désigne par (C) la courbe de f dans un repère orthonormé du plan (O, i, j).

1) a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que $\Delta : y = -x$ est une asymptote oblique à la courbe (C).

b) Etudier la position Δ et (C).

3) Tracer Δ et (C).

4) Déterminer la primitive F de f qui s'annule en 1.

EXERCICE N°3.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$. On désigne par (ζ_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $R = (O, \vec{u}, \vec{v})$. (Unité 2cm)

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter les résultats obtenus.

b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifier que $f'(x) = \frac{2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur l'intervalle J.

c) Déterminer une équation de la tangente T à $(\zeta_{f^{-1}})$ au point d'abscisse ½.

3) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour x dans J.

4) Tracer dans le repère R la droite T et les courbes (ζ_f) et $(\zeta_{f^{-1}})$.