DEVOIR SYNTHESE 2.

12 MAI 2017 (3 H).

4° sc. TECH.

SMAALI.

CE SUJET COMPORTE 4 PAGES.

L'UTILISATION D'UNE CALCULATRICE EST AUTORISÉE.

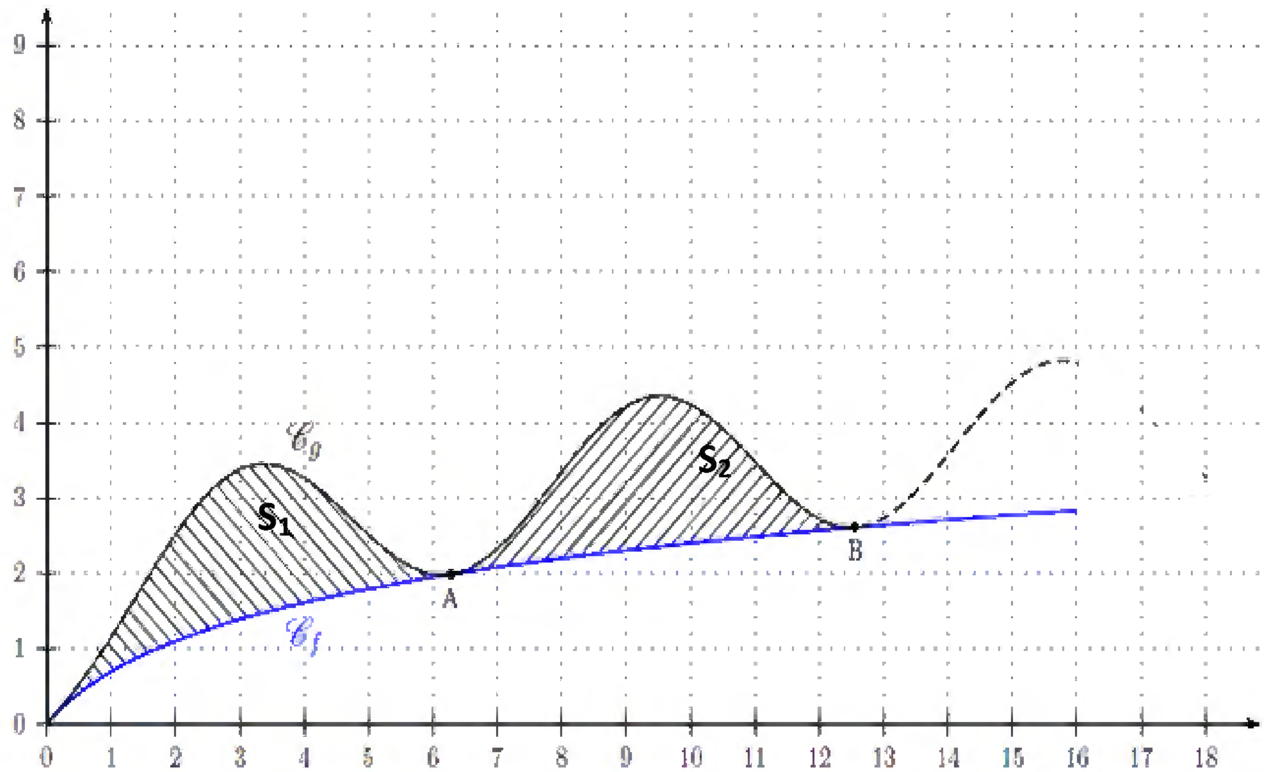
LE SUJET EST COMPOSÉ DE 4 EXERCICES INDÉPENDANTS.

<u>LA QUALITÉ DE LA RÉDACTION, LA CLARTÉ ET LA PRÉCISION DES RAISONNEMENTS ENTRERONT POUR UNE PART IMPORTANTE DANS L'APPRÉCIATION DES COPIES.</u>

EXERCICE N°1.

Dans le repère ci-dessous, Cf et Cg sont les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\ ;\ 16]$ par :

$$f(x) = \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x).$$



Comparer les aires des deux surfaces hachurées S_1 et S_2 sur ce graphique. Justifier.

EXERCICE N°2.

Le tableau suivant donne l'évolution de la population (en million) de l'Inde de 1951 à 1991.

année	1951	1961	1971	1981	1991
Rang x_i	1	2	3	4	5
Population y_i	361	439	548	683	846

1. Représenter graphiquement le nuage de points $(x_i ; y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unités graphiques 1 cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 100 millions sur l'axe des ordonnées.

2.
   a) À l'aide de la calculatrice, déterminer un ajustement affine de y en x par La méthode des moindres carrés.

   b) En utilisant cet ajustement, déterminer la population de l'Inde que l'on pouvait prévoir pour 2001. (arrondir au million).

3. On cherche un autre ajustement et on se propose d'utiliser le changement de variable suivant : $z = \ln y$.

   a) À l'aide de la calculatrice, déterminer un ajustement affine de z en fonction de x par la méthode des moindres carrés (arrondir les coefficients au millième).

   b) En déduire qu'une approximation de la population y, exprimée en millions d'habitants, en fonction du rang x de l'année est donnée par : $y = \beta .\, e^{\alpha x}$

   où α et β sont deux réels qu'on les déterminera (α est arrondi au millième et β à l'unité)

   c) En utilisant cet ajustement, calculer la population que l'on pouvait prévoir pour 2001 (le résultat sera arrondi au million).

4. Les résultats obtenus en 2001 ont révélé que la population comptait 1 037millions d'habitants. Déterminer une estimation de la population, arrondie au million d'habitants, en 2021 en choisissant le modèle qui semble le plus approprié. Justifier ce choix.

EXERCICE N°3.

A/ Un établissement doit recevoir la visite d'un inspecteur entre 8 h et 18 h.
L'heure d'arrivée de cet inspecteur est aléatoire.
On note : X la variable aléatoire égale à l'heure de l'arrivée de l'inspecteur.

1). Déterminer la fonction f de densité de probabilité de X.

2). Calculer la probabilité que l'inspecteur arrive :

(a) avant 10 h (b) après 12 h (c) entre 9 h 30 et 11 h

3). Calculer l'espérance de l'heure d'arrivée de l'inspecteur.

4). L'établissement apprend que l'inspecteur n'arrivera pas après 17 h.
Calculer la probabilité que l'inspecteur arrive après 11 h.

B/ (Dans cette partie toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près).
Le laboratoire de l'établissement dispose d'un parc de machines identiques.
La durée de vie en années d'une machine est une variable aléatoire notée Y qui suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$, et vérifiant $p(Y>10)=0{,}3$

1). Montrer qu'une valeur approchée de λ est 0,12.

2). Calculer la probabilité qu'une machine ait une durée de vie inférieure à 6mois.

3). Sachant qu'une machine a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'elle ait une durée de vie supérieure dix ans?

4). On considère que la durée de vie d'une machine est indépendante de celle des autres. Le responsable du parc a commandé 10 machines. Quelle est la probabilité qu'au moins une des machines ait une durée de vie supérieure à 10 ans?

5). Combien l'établissement devrait-il acheter de machines pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,99999?

EXERCICE N°4.

A/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(1+2.e^{x})$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que la droite D d'équation $y = x + \ln 2$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.
3) Etudier la position relative de (C) par rapport à la droite D.
4) Tracer D, (C) et la tangente T à (C) au point d'abscisse 0.

B/ On considère (U_n) définie par : $U_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = f(U_n)$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n \geq \ln 2$.
2) Montrer que (U_n) n'est pas convergente.
3) on pose $V_n = 1 + e^{U_n}$.
   - a- Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 2
   - b- déduire l'expression de U_n en fonction de n
   - c- calculer : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

C/

1) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^*_+$.
2) déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$, pour tout $x>0$
3) tracer la courbe (C') de f^{-1} dans le même repère que (C).
4) soit A l'aire, en unité d'aire, da la région du plan limitée par (C'), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 2\ln 3$ et $x = 3\ln 3$.

   Montrer que : $\ln 3 . \ln 4 \leq A \leq \ln 3 . \ln 13$