Lycée Bechri 2018/2019

Devoir de synthèse N°1

$4^{ème}$ Maths
Durée : 4H

Exercice N°1

(6 points)

Soit ABC un triangle de sens direct, rectangle en C tel que : $AB = 2AC$.

On désigne par O le milieu de $[AB]$ et par D le point tel que ABD soit équilatéral de sens direct.

❶ Soit S la similitude direct qui envoie A sur C et B sur A .

a) Déterminer le rapport et l'angle de S.

b) Construire le centre H de S.

❷ Soit δ l'application du plan P dans lui-même telle que : $\delta(O) = A$, $\delta(A) = B$ et $\delta(C) = D$.

a) Prouver que δ est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.

b) Soit Ω le barycentre des points pondérés $(O\,,2)$ et $(A\,,1)$. Montrer que : $2\overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} = \vec{0}$.

c) En déduire que : $\delta(\Omega) = \Omega$.   Construire l'axe Δ de δ.

d) On note E l'image de B par δ . Montrer que BED est un triangle de sens direct , rectangle en D.

❸ Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application $So\delta$

Exercice N°2

(4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}\,, \vec{\jmath})$. Soit Γ l'ensemble des points $\boldsymbol{M(x,y)}$ tel que : $x^2 - y^2 - 2xy\sqrt{3} + 2 = 0$.

❶ On pose $\boldsymbol{j} = -\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ et on considère l'application g du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe **z** associe le point M' d'affixe **z'** tel que $z' = jz$.

Montrer que g est la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

❷ Soit $H = \{M(z)\epsilon P \; tel \; que \; Re(z^2) = 1\}$

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de H.

b) Tracer H.

❸ a) Montrer que : $M(z)\epsilon\,\Gamma$ si et seulement si $\mathrm{Re}((jz)^2) = 1$.

b) Montrer que H est l'image de Γ par g .

c) En déduire la nature et les caractéristiques de Γ .

Exercice N°3

(6 points)

A / Soit la fonction g définie sur $]0\,,1]$ par $g(x) = 2 - 2x + \ln(x)$.

❶ Dresser le tableau de variation de g .

❷ Montrer que $g(x) = 0$ admet dans $\left]0\,,\frac{1}{2}\right[$ une solution unique $\propto$ et que

Pour tout $t \in [\propto, 1]$ on a : $2t - 2 \leq \ln(t)$.

❸ Construire la courbe de g dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (unité : 4 cm)

❹ Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par C_g , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \frac{1}{2}$.

B / Soit F la fonction définie sur $\left]0\,,\frac{1}{2}\right[$ par F(x)=$\int_x^{2x} \frac{1}{\ln(t)}\, dt.$

❶ Montrer que F est dérivable sur $\left]0\,,\frac{1}{2}\right[$ et que $F'(x) = \dfrac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{\ln(2x).\ln(x)}$

❷ Montrer que pour tout $x \in \left]0\,,\frac{1}{2}\right[$ on a : $\frac{x}{\ln(2x)} \leq F(x) \leq \frac{x}{\ln(x)}$.

❸ Montrer que pour tout $x \in \left[\propto,\frac{1}{2}\right[$, on a : $F(x) \leq \frac{1}{2}\int_x^{2x} \frac{dt}{t-1}$.

Déterminer alors $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} F(x)$.

❹ Dresser le tableau de variation de F.

❺ **a)** Montrer que pour tout $n \in IN^*$ l'équation : $1 + nF(x) = 0$ admet dans $\left]0\,,\frac{1}{2}\right[$ Une solution $\propto_n$.

c) Montrer que $(\propto_n)$ est une suite décroissante et qu'elle est convergente.

Exercice N°4

(4 points)

Prof : Lahmadi Adel

Pour tout $n \in IN$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx$.

❶ Montrer que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$

❷ Montrer pour tout $n \in IN$, $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

❸ Calculer I_0 puis déduire I_1 .

❹ Démontrer par récurrence que pour tout $n \in IN^*$: $(-1)^n I_n = \ln 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$

❺ En déduire la limite de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\right)_n$.