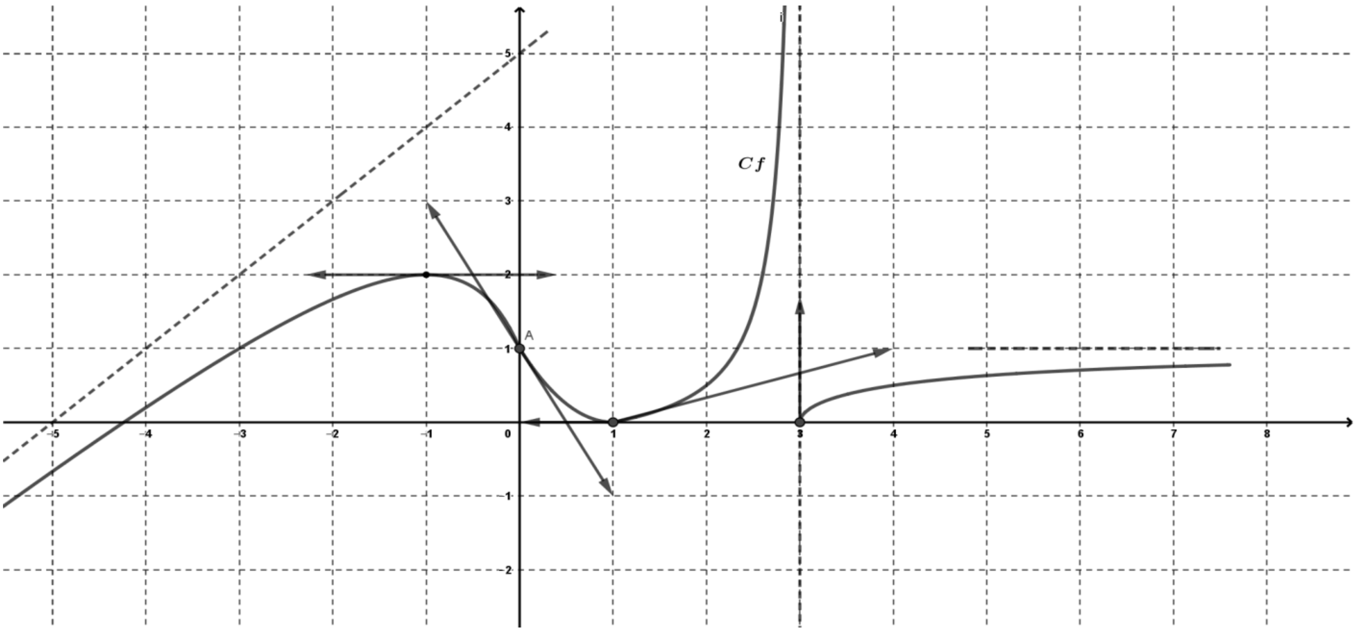
Devoir de synthèse N°1

Durée : 2H

Lycée Bechri 2017/2018 3ème Maths Prof : Lahmadi Adel

Exercice N° 1 (5 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne la représentation graphique $\mathscr{C}f$ d'une fonction f.



Par lecture graphique :

❶ Préciser le domaine de définition de f.

❷ Déterminer $f(-1)$, $f(0)$, $f'(-1)$ et $f'(0)$

❸ f est-elle dérivable en 1 ? justifier votre réponse .

❹ Donner les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}f$.

❺ Déterminer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-x-5)$, $\lim\limits_{x\to3^+} \frac{f(x)}{x-3}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-5}{f(x)-1}$.

❻ Que représente le point **A** pour la courbe $\mathscr{C}f$?

Exercice N°2 (6 points)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+8}-7 & si\ \ x \le 1 \\ \frac{(x^2+2x-3)(x-3)}{x^2-1} & si\ \ x > 1 \end{cases}$

Cf sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

❶ Montrer que f est continue en 1 .

❷ a) Etudier la dérivabilité de f en 1.

b) Interpréter graphiquement le résultat.

❸ a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) Montrer que la droite $\Delta: y = -x-7$ est une asymptote oblique à **Cf** au voisinage de $-\infty$.

❹ a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

b) Vérifier que pour tout $x > 1$, $f(x) = x - 1 - \frac{8}{x+1}$.

c) Montrer que la droite $\Delta' : y = x - 1$ est une asymptote oblique à **Cf** au voisinage de $+\infty$.

d) Etudier la position relative de **Cf** par rapport à Δ' sur lintervalle $]1, +\infty[$.

EXERCICE N°3 **(5 points)**

Dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points A et B dont les cooronnées **polaires** sont $A[1, 0]$ et $B\left[1, \frac{2\pi}{3}\right]$.

On considère également le point C dont les coordonnées cartésiennes sont $C(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

❶ Préciser les coordonnées cartésiennes de A et B .

❷ Calculer les coordonnés polaires de **C** et de **H** milieu de $[OA]$.

❸ Donner la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$

❹ Justifier que les points A , B et C sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

❺ Placer , précisement les points A, B et C sur une figure

❻ Quelle est la nature du triangle ABC ? justifier

❼ En déduire autrement la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$

EXERCICE N°4 **(4 points)**

On pose pour tout réel x : $A(x) = sinx + sin3x + sin5x$ et $B(x) = cosx + cos3x + cos5x$

❶ Montrer que : $A(x) = 2sin3x(cos2x + \frac{1}{2})$ et $B(x) = 2cos3x(cos2x + \frac{1}{2})$.

❷ Soit la fonction $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to IR$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$$.

a) Donner le domaine de définition de f .

b) Simplifier $f(x)$ puis calculer $f(\frac{\pi}{9})$.

❸ On pose **P**= $\boldsymbol{cos\frac{\pi}{7}.cos\frac{2\pi}{7}.cos\frac{4\pi}{7}}$.

a) Exprimer $sin\frac{2\pi}{7}$ en fonction de $sin\frac{\pi}{7}$ et $cos\frac{\pi}{7}$.

b) Calculer 8**P**$\boldsymbol{sin\frac{\pi}{7}}$ **et** en déduire que **P** $= -\frac{1}{8}$.

On donne :

$$\boldsymbol{cosa + cosb = 2cos\left(\frac{a+b}{2}\right)cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{sina + sinb = 2sin\left(\frac{a+b}{2}\right)cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}$$