LYCEE SBEITLA

DEVOIR DE SYNTHESE N°1
Prof – BELLILI MONGI
DATE : 07 / 12 / 2011 , Durée : 2h

4ème tech

EXERCICE N°1 (04 pts)

Pour chacune des questions suivantes, on propose trois solutions dont une seule est exacte. Recopier sur votre copie cette solution.

1/ La fonction $h : x \mapsto \sqrt{-x^2+4x-3}$ est dérivable sur :

a- $[1,3]$ b- $]1,3[$ c- $]0,+\infty[$

2/ Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a: $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

Alors la fonction $g : x \mapsto f(\tan x)$ avec $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ a pour fonction dérivée :

a- $g'(x)=\dfrac{1}{1+\tan^2 x}$ b- $g'(x)=1+\tan^2 x$ c- $g'(x)=1$

3/ La fonction dérivée de la fonction $h : x \mapsto x^2.\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

a- $h'(x)=2x.\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ b- $h'(x)=2x.\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)+x^2.\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ c- $h'(x)=2x.\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

4/ Le nombre complexe : $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ est une :

a- Racine huitième de l'unité b- Racine sixième de l'unité c- Racine quatrième de l'unité

EXERCICE N°2 (08 pts)

Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=1+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ et ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a- Justifier que f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et montrer que pour tout $x \in]-1;+\infty[$ on a :

$$f'(x)=\frac{-1}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

b- Dresser le tableau de variation de f.

2) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans $]-1;+\infty[$ une unique solution α puis vérifier que : $\dfrac{3}{2}<\alpha<\dfrac{7}{4}$

3/ Tracer ζ_f

4/ a- Montrer que pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a : $|f'(x)| \le \dfrac{1}{2}$

b- déduire que pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a : $|f(x)-\alpha| \le \dfrac{1}{2}|x-\alpha|$

Suite au verso

5/ a- Montrer que f réalise une bijection de $]-1;+\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

b- Tracer la courbe représentative de f^{-1} ,la fonction réciproque de f dans le même repère

c- Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in I$.

EXERCICE N°3 **08 pts**

Soit θ un réel appartenant à $]0,\pi[$; on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E_\theta) : z^2 - 2z - 2i.\sin\theta.e^{i\theta} = 0$$

1/ Montrer que si z' et z'' sont les solutions de (E_θ) alors on a : $\arg(z') + \arg(z'') \equiv \theta - \frac{\pi}{2} [2\pi]$

(on ne demande pas de déterminer z' et z'' dans cette question)

2/a- Monter que : $1 + 2i.\sin\theta.e^{i\theta} = e^{i2\theta}$

b- Résoudre l'équation (E_θ)

3/ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On désigne par A , M et N les points d'affixes respectives : 2 ; $1 - e^{i\theta}$ et $1 + e^{i\theta}$

a- Mettre z_M et z_N sous forme exponentielle

b- Montrer que le quadrilatère OMAN est un rectangle

c- Déterminer la valeur de θ pour la quelle OMAN soit un carré

4/ Déterminer l'ensemble des points M lorsque θ varie dans $]0,\pi[$

BON TRAVAIL