LYCEE SBEITLA

DEVOIR DE SYNTHESE N°3

PROF – BELLILI MONGI & EL ABDIDI ZAHI

DATE : 09 / 04 / 2013 , Durée : 04 h

4ème math1&2

EXERCICE N°1

On considère l'équation différentielle : $(E): y'-2y=2e^{2X}-2$

1- Montrer que la fonction $g : x \mapsto 2xe^{2x}+1$ *est une solution de (E)*

2°) Résoudre l'équation différentielle $(E'): y'-2y=0$

3°) a- Monter qu'une fonction f est une solution de (E) si et seulement si ($f-g$ *) est une solution de (E')*

b- Déduire alors les solutions de (E)

c- Déterminer la solution f_0 *de (E) qui prend la valeur 1 en 0*

EXERCICE N°2

Pour tout entier $n\in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ *par:* $f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$ et on désigne par ζ_n sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

I- 1°) Dresser le tableau des variations de la fonction f_1

2°) Montrer que ζ_1 admet un point d'inflexion I d'ont on précisera les coordonnées puis donner une équation de la tangente T à ζ_1 au point I

3°) Tracer ζ_1 et T

II- Pour tout entier $n\in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n=\int_0^n f_n(x)dx$

1°) Donner une interprétation géométrique de I_n

2°) a- Montrer que pour tout réel $t\in[0,+\infty[$, on a : $1-t\le \frac{1}{1+t}\le 1$

b- Déduire que pour tout réel $x\in[0,+\infty[$ on a : $x-\frac{x^2}{2}\le \ln(1+x)\le x$

c- Montrer que pour tout entier $n\in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel $x\in[0,n]$ on a : $x-\frac{x^2}{2n}\le n.\ln(1+\frac{x}{n})\le x$

et que : $e^{-x}.e^{-\frac{x^2}{2n}}\le f_n(x)\le e^{-x}$

3°) Montrer que tout entier $n\in \mathbb{N}^*$, on a : $I_n\le 1-e^{-n}$

4°) a- Montrer que pour tout réel $t\in[0,+\infty[$, on a : $e^{-t}\ge 1-t$

b- Déduire que tout entier $n\in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel $x\in[0,n]$ on a : $e^{-x}.e^{-\frac{x^2}{2n}}\ge e^{-x}\left(1-\frac{x^2}{2n}\right)$

c- A l'aide de deux intégrations par parties, calculer l'intégrale : $\int_0^n e^{-x}\left(1-\frac{x^2}{2n}\right)dx$

d- Déduire que tout entier $n\in \mathbb{N}^*$, on a : $I_n\ge 1-\frac{1}{n}+e^{-n}\left(\frac{1}{n}+\frac{n}{2}\right)$

5°) Monter que $(I_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite

EXERCICE N°3

1°) a- Vérifier que (2, 1) est une solution de l'équation (E) : $7x-11y=3$ puis la résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

b- Déterminer les coordonnées entières des points de la droite D : 7x – 11y – 3 = 0 comprises entre 0 et 15

2°) Soit u un entier vérifiant le système S: $\begin{cases} u\equiv 2(\text{mod}7) \\ u\equiv 5(\text{mod}11) \end{cases}$

Déterminer le reste modulo 77 de u

3°) pour tout entier n on pose : a = 11n + 2 et b = 7n + 1 et on désigne par d le PGCD de a et b

a- Quelle sont les valeurs possibles de d ?

b- Montrer que d = 3 $\Leftrightarrow n\equiv 2(\text{mod}3)$

c- Montrer que les entiers $(11\times 2012^{2k}+2)$ et $(7\times 2012^{2k}+1)$ sont premiers entre eux pour tout $k\in\mathbb{N}$

EXERCICE N°4

Dans une population donnée, 60 $\circ/\circ$ des familles occupent une maison individuelle.
Parmi elles, 75 $\circ/\circ$ en sont propriétaires de leur logement. Parmi les familles n'occupant pas une maison individuelle, 33 $\circ/\circ$ sont propriétaires de leur logement.
On choisit au hasard une famille et on considère les évènements suivants :

I : « La famille habite une maison individuelle »

A : « La famille est propriétaire de son logement »

I°) a- Déterminer les probabilités : P(I) , P(A/I) et $P(A/\overline{I})$

b- Déterminer la probabilité pour que la famille habite une maison individuelle et propriétaire

c- Quelle est la probabilité que la famille n'habite pas une maison individuelle et non propriétaire

d- Montrer que : $P(A)=0,582$

e- Quelle est la probabilité pour que la famille habite une maison individuelle sachant quelle est propriétaire de son logement ?

II°) On interroge n familles au hasard et successivement

1°) On prend dans cette question n = 5

a- Quelle est la probabilité d'avoir cinq familles propriétaire de leur logement

b- Quelle est la probabilité d'avoir au moins quatre familles propriétaire de leur logement

c- Quel est le nombre moyen des familles propriétaire de leur logement

2°) a- Soit n un entier naturel quelconque, déterminer en fonction de n , la probabilité P_n pour qu'il on a au moins une famille propriétaire de son logement

b- Déterminer le plus petit entier n tel que $P_n\geq 0,95$

EXERCICE N°5

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la population d'un pays de 1970 à 2005 .
T désigne le rang de l'année et P est la population (en millions d'habitants)

Année	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005
Rang de l'année : T	0	5	10	15	20	25	30	35
Population: P	8	8,9	9,9	11	12	13,5	15	16 ,6

1°) Représenter le nuage de points associé a la série statistique (T,P) dans un repère orthogonal

2°) Calculer le coefficient de corrélation de la série statistique (T,P).

Un ajustement affine est-il justifié ? si oui, déterminer la droite de régression de P en T

3°) Les experts cherchent à modéliser cette évolution par une fonction dont la courbe est au voisinage du nuage de points. Pour cela , on pose : $Y = ln(P)$

a- Déterminer la droite de régression de Y en T

b- Déduire l'expression de la population P en fonction de T .

4°) on admet que la fonction f définie sur $[0,35]$ par : $f(t) = 8e^{0,02\,t}$ est une modélisation satisfaisante de l'évolution de population (en millions d'habitants) de 1970 à 2005.

a- Calculer l'intégrale $I = \int_0^{35} f(t)dt$ puis déduire la population moyenne du pays durant les 35 années

b- Si le modèle exponentielle précédent reste valable après 2005, en quelle année la population aurait-elle dépassé 20 millions d'habitants ?

BON TRAVAIL