LYCEE SBEITLA

DEVOIR DE SYNTHESE N°2

PROF – BELLILI MONGI

DATE : 05 / 03 / 2013 , Durée : 04 h

4ème math2

EXERCICE N°1 (05 pts)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ *par :* $f(x)=x+\ln x-(\ln x)^2$ *et* ζ *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) a- Calculer : $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

b- Etudier la position relative de ζ et la droite Δ d'équation : $y=x$

2°) On a tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.(voir annexe)

a- Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$

b- Tracer la courbe représentative ζ' de la fonction f^{-1} réciproque de f dans le même repère

3°) Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes ζ et ζ' et les droites d'équations : $x=1$ et $x=e$

a- Montrer que : $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e-2$

b- Calculer $\mathscr{A}$

c- Déduire $\int_1^e f^{-1}(x)dx$

EXERCICE N°2 (05 pts)

Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $I_n=\frac{1}{n!}\int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2}dx$

1°) a- En utilisant une intégration par parties, calculer I_1

b- Montrer que la suite (I_n) est décroissante et quelle converge

c- Montrer que pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $0\le I_n\le\frac{(\ln 2)^n}{n!}$ puis déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$

2°) a- Montrer que pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $I_{n+1}=I_n-\frac{1}{2}\frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$

b- En déduire que pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $I_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln 2}{1!}+\frac{(\ln 2)^2}{2!}+\dots\dots+\frac{(\ln 2)^n}{n!}\right)$

3°) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n=1+\frac{\ln 2}{2!}+\frac{(\ln 2)^2}{3!}+\dots\dots+\frac{(\ln 2)^n}{n!}$

a- Exprimer U_n en fonction de I_n

b- En déduire que la suite (U_n) converge et calculer sa limite

EXERCICE N°3 (05 pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. *On considère l'ensemble* $(\mathscr{E})$ *des points M (x , y)*

Vérifiant : $9x^2+4y^2-18x-27=0$

1°) a- *Montrer que M vérifie l'équation :* $\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$

b- *Préciser la nature de* $(\mathscr{E})$ *et déterminer les coordonnées de son centre* Ω ; *ses sommets et son excentricité* e

c- *Tracer* $(\mathscr{E})$

2°) *pour tout réel* $\theta\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, *on considère le point* $N\left(2\cos\theta,\ 3\sin\theta\right)$ *dans le repère orthonormé* $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$

a- *Vérifie que pour tout réel* $\theta\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $N\in(\mathscr{E})$

b- *Montrer qu'une équation de la tangente T à* $(\mathscr{E})$ *au point N est :* $3X.\cos\theta+2Y.\sin\theta-6=0$

c- *La tangente T coupe l'axe des abscisses* $\left(\Omega,\vec{i}\right)$ *au point I et l'axe des ordonnées* $\left(\Omega,\vec{j}\right)$ *au point J.*

d- *Déterminer les coordonnées des points I et J dans le repère* $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$

e- *Montrer que l'aire* $A(\theta)$ *du triangle* ΩIJ *est :* $A(\theta)=\dfrac{6}{\sin 2\theta}$

f- *Déterminer les coordonnées du point N pour le quel* $A(\theta)$ *est minimale*

EXERCICE N°4 (05 pts)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j};\vec{k}\right)$.

On considère les points $A(1,-1,0)$, $B(-3,0,3)$ *et* $C(1,1,2)$

1°) *Montrer le plan P passant par les points A ,B et C à pour équation cartésienne :* $x-2y+2z-3=0$

2°) *Vérifier que OABC est un tétraèdre puis calculer son volume V*

3°) *Soit S l'ensemble des points M(x,y,z) de l'espace tel que :* $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+2=0$

Et le plan P_m *d'équation :* $x-2y+2z-m=0$ *ou* $m\in\mathbb{R}$

a- *Montrer que S est la sphère de centre le point* $I(2,-1,1)$ *et de rayon* $R=2$

b- *Etudier, suivant les valeurs de m, la position relative de plan* P_m *et la sphère S*

c- *Déduire que le plan P coupe S suivant un cercle* ζ *dont on précisera le centre H et le rayon r*

4°) *On considère l'homothétie h de centre I de rapport* -4.

a- *Donner l'expression analytique de l'homothétie h.*

b- *Déterminer une équation cartésienne du plan P',image de P par h.*

c- *Préciser le centre et le rayon de la sphère* $S'=h(S)$

d- *Préciser la position relative du plan P' et la sphère S'*

ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE

NOM :…………………………………PRENOM :……………………………………….CALSSE :………………..