DEVOIR DE SYNTHESE N°1

PROF – BELLILI MONGI

DATE : 04 / 12 / 2012 , Durée : 3h

LYCEE SBEITLA

4ème math2

EXERCICE N°1 (02 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

1°) Soit z un nombre complexe non nul d'argument α *. Alors un argument de* $\dfrac{\sqrt{3}-i}{\left(\bar{z}\right)^2}$ *est :*

a/ $-\dfrac{\pi}{6}+2\alpha$ b/ $-\dfrac{\pi}{6}-2\alpha$ c/ $-\dfrac{\pi}{6}+\alpha^2$

2°) Soient A et B deux points d'affixes respectives 2 et 2i .

Alors l'ensemble des points M(z) tel que : $\dfrac{z-2i}{z-2}$ *soit imaginaire pur est :*

a/ la droite (AB) privée des points A et B

b/ Le segment [AB] privé des points A et B

c/ Le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B

3°) Soit M et M' deux points distincts du plan complexe d'affixes non nulles respectives z et z'; symétriques par rapport à l'axe des réels alors :

a/ $z' = -z$ b/ $z'=\bar{z}$ c/ $z'=\dfrac{1}{z}$

EXERCICE N°2 (05,5 pts)

Soit f la fonction définie sur $\left]-\infty,4\right]$ *par* $f(x)=\dfrac{3}{1+\sqrt{4-x}}$

On désigne par ζ_f *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1/ a- Etudier la dérivabilité de f à gauche en 4 puis interpréter graphiquement le résultat

b- Montrer que f est dérivable sur $\left]-\infty,4\right[$ *et que pour tout :*

$x\in\left]-\infty,4\right[$ *on a:* $f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{4-x}\left(1+\sqrt{4-x}\right)^2}$ *et dresser le tableau de variation de f*

c- Vérifier que $x\in\left]-\infty,3\right]$ *on a:* $f'(x)\le\dfrac{3}{8}$

d- Montrer que l'équation f(x) = x admet dans $\left]-\infty,3\right]$ *une unique solution* α *puis vérifier que* $\alpha\in\left]1,\dfrac{3}{2}\right[$

e- Tracer la courbe représentative ζ_f *de f dans un repère orthonormé* $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

2°) a- Montrer que f réalise une bijection de $\left]-\infty,4\right]$ *sur un intervalle J que l'on précisera.*

On désigne par f^{-1} *la fonction réciproque de f et* $\zeta_{f^{-1}}$ *sa courbe représentative*

b- Tracer la courbe $\zeta_{f^{-1}}$ *et calculer* $f^{-1}(x)$ *pour tout réel x de J*

3°) Soit (U_n) *la suite définie sur* $\mathbb{N}$ *par :* $\begin{cases}U_0=2\\U_{n+1}=f(U_n)\end{cases}$

a- Montrer que pour tout entier n , on a : $1\le U_n\le 3$

b- Montrer que pour tout entier n on a : $\left|U_{n+1}-\alpha\right|\le\dfrac{3}{8}\left|U_n-\alpha\right|$

c- En déduire que (U_n) *converge et déterminer sa limite*

suite au verso

EXERCICE N°3 (04,5 pts)

1°) Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{1}{2}\right[$ par : $f(x)=\frac{1}{\cos(\pi x)}$

a- Etudier les variations de f et déduire quelle réalise une bijection de $\left[0,\frac{1}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} sa fonction réciproque.

b- Calculer $f^{-1}(2)$

c- Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1,+\infty[$ et calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)$ pour tout x appartenant à $]1,+\infty[$

2°) Soit n entier naturel non nul, on considère la fonction f_n définie sur $\left[0,\frac{1}{2}\right[$ par : $f_n(x)=f(x)+x^n-2$

a- Etudier les variations de la fonction f_n et déduire que l'équation : $f_n(x)=0$ admet dans $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ une unique solution qu'on la note α_n

b- Montrer que pour tout $x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$ on a : $f_{n+1}(x)<f_n(x)$

c- Déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante

d- Montrer alors que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite

EXERCICE N°4 (03 pts)

1°) Soit $\theta\in]0,\pi[$, on considère l'équation (E) : $z^2-2e^{i\theta}z+e^{2i\theta}-1=0$; résoudre (E)

2°) Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ on considère les points A ,B et C d'affixes respectives : $z_1=2e^{i\theta}$; $z_2=1+e^{i\theta}$ et $z_3=-1+e^{i\theta}$

a- Ecrire z_2 et z_3 sous forme exponentielle

b- Montrer que le quadrilatère OBAC est un rectangle

c- Déterminer le réel $\theta\in]0,\pi[$ tel que OBAC soit un carré

EXERCICE N°5 (05 pts)

Le plan est orienté dans le sens direct, on considère un carré direct ABCD de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soit M un point de la droite (BC) distinct de B et de C. La perpendiculaire à (AM) en A coupe (DC) en N.

On désigne par : R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et par T la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$

1°) a- Déterminer l'image de la droite (BC) par R

b- Montrer que le triangle AMN est isocèle et rectangle en A

2°) Montrer que l'application $f=T\circ R$ est une rotation dont on déterminera l'angle et le centre

3°) a- Montrer qu'il existe un unique déplacement φ tel que : $\varphi(B)=A$ et $\varphi(C)=B$ que l'on caractérisera

b- Montrer que $\varphi\circ R$ est une translation dont on déterminera le vecteur

4°) Soit ψ l'antidéplacement tel que : $\psi(B)=A$ et $\psi(C)=B$. On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [BC]

a- Montrer que ψ est une symétrie glissante et déterminer ses éléments caractéristiques

b- Montrer que l'application $\varphi^{-1}\circ\psi$ est une symétrie orthogonale dont on déterminera l'axe

BON TRAVAIL