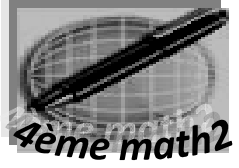




**DEVOIR DE CONTROLE N°2**  
**PROF – BELLILI MONGI**  
**DATE : 13 / 02 / 2013 , Durée : 2h**



**EXERCICE N°1 (07 pts)**

1°) On considère la fonction  $F$  définie sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  par  $F(x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{1-t^2} dt$

a- Montrer que  $F$  est dérivable sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et calculer sa fonction dérivée

b- Montrer que pour tout  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  on a :  $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$

2°) Pour tout entier naturel non nul, on pose :  $I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2} dt$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$

a- Calculer  $I_0$  et  $I_1$

b- Montrer, en utilisant une intégration par parties, que pour tout  $n \geq 1$  on a :  $I_{n+1} = \frac{n}{n+3} I_{n-1}$

c- Calculer alors :  $I_2$  et  $I_3$

3°) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$  puis déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

**EXERCICE N°2 (07 pts)**

Soit  $ABC$  un triangle équilatéral direct inscrit dans un cercle  $\zeta$  de centre  $O$ .

Soit  $I$  le point diamétralement opposé à  $C$  sur  $\zeta$ .

1°) Montrer que triangle  $OAI$  est équilatéral direct.

2°) Soit  $f$  la similitude directe tels que :  $f(I) = O$  et  $f(C) = B$

a- Déterminer le rapport et un angle de  $f$ .

b- Soit  $\Omega$  le centre de  $f$ . Montrer que  $\Omega$  est un point commun aux cercles circonscrits aux triangles  $IOA$  et  $BOC$ . Puis déduire une construction de  $\Omega$ .

3°) a- Montrer que  $f$  transforme la droite  $(AI)$  en  $(OA)$  et la droite  $(AC)$  en  $(BC)$ .

c- Déduire que l'image  $A'$  du point  $A$  par  $f$  est le milieu du segment  $[BC]$

4°) Soit  $r$  la rotation de centre  $O$  tel que :  $r(A) = C$  et  $h$  l'homothétie de centre  $B$  et de rapport  $\frac{1}{2}$

Montrer que  $f = h \circ r$

5°) Soit  $g$  la similitude indirecte tels que :  $g(I) = O$  et  $g(C) = B$

a- Déterminer le rapport de  $g$

b- Montrer que :  $g(B) = A'$ .

c- On désigne par  $J$  le centre de  $g$ . Montrer que :  $\overrightarrow{JC} = 4\overrightarrow{JA'}$

d- Montrer que l'axe  $\Delta$  est la perpendiculaire à  $(BC)$  en  $J$ .

**EXERCICE N°3 (06 pts)**

Dans le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  on considère la courbe  $\mathcal{H}$  d'équation :

$$-\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

1°) a- Préciser la nature de  $\mathcal{H}$  et déterminer ses éléments caractéristiques.

b- Tracer  $\mathcal{H}$

2°) Pour tout réel  $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ , on considère les points  $M_\alpha \left( 1 + 2 \tan \alpha, \frac{3}{\cos \alpha} \right)$

a- Vérifier que  $M_\alpha \in \mathcal{H}$

b- Déterminer une équation cartésienne de la tangente  $T$  à  $\mathcal{H}$  au point  $M_\alpha$ .

c- Déterminer les coordonnées des points  $M_0$  et  $M_{\frac{\pi}{4}}$

d- Calculer le volume du solide de révolution obtenue par la rotation de l'arc  $\widehat{M_0 M_{\frac{\pi}{4}}}$  au tour de l'axe des abscisses.

