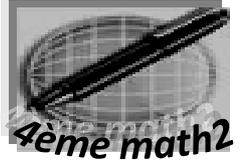




DEVOIR DE CONTROLE N°2
PROF – BELLILI MONGI
DATE : 13 / 02 / 2013 , Durée : 2h



EXERCICE N°1 (07 pts)

1°) On considère la fonction F définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $F(x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{1-t^2} dt$

a- Montrer que F est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et calculer sa fonction dérivée

b- Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a : $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$

2°) Pour tout entier naturel non nul, on pose : $I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2} dt$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$

a- Calculer I_0 et I_1

b- Montrer, en utilisant une intégration par parties, que pour tout $n \geq 1$ on a : $I_{n+1} = \frac{n}{n+3} I_{n-1}$

c- Calculer alors : I_2 et I_3

3°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ puis déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

EXERCICE N°2 (07 pts)

Soit ABC un triangle équilatéral direct inscrit dans un cercle ζ de centre O .

Soit I le point diamétralement opposé à C sur ζ .

1°) Montrer que triangle OAI est équilatéral direct.

2°) Soit f la similitude directe tels que : $f(I) = O$ et $f(C) = B$

a- Déterminer le rapport et un angle de f .

b- Soit Ω le centre de f . Montrer que Ω est un point commun aux cercles circonscrits aux triangles IOA et BOC . Puis déduire une construction de Ω .

3°) a- Montrer que f transforme la droite (AI) en (OA) et la droite (AC) en (BC) .

c- Déduire que l'image A' du point A par f est le milieu du segment $[BC]$

4°) Soit r la rotation de centre O tel que : $r(A) = C$ et h l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$

Montrer que $f = h \circ r$

5°) Soit g la similitude indirecte tels que : $g(I) = O$ et $g(C) = B$

a- Déterminer le rapport de g

b- Montrer que : $g(B) = A'$.

c- On désigne par J le centre de g . Montrer que : $\overrightarrow{JC} = 4\overrightarrow{JA'}$

d- Montrer que l'axe Δ est la perpendiculaire à (BC) en J .

EXERCICE N°3 (06 pts)

Dans le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) on considère la courbe \mathcal{H} d'équation :

$$-\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

1°) a- Préciser la nature de \mathcal{H} et déterminer ses éléments caractéristiques.

b- Tracer \mathcal{H}

2°) Pour tout réel $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, on considère les points $M_\alpha \left(1 + 2 \tan \alpha, \frac{3}{\cos \alpha} \right)$

a- Vérifier que $M_\alpha \in \mathcal{H}$

b- Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à \mathcal{H} au point M_α .

c- Déterminer les coordonnées des points M_0 et $M_{\frac{\pi}{4}}$

d- Calculer le volume du solide de révolution obtenue par la rotation de l'arc $\widehat{M_0 M_{\frac{\pi}{4}}}$ au tour de l'axe des abscisses.

