LYCEE SBEITLA

DEVOIR DE CONTROLE N°2

PROF – BELLILI MONGI

DATE : 13 / 02 / 2013 , Durée : 2h

4ème math2

EXERCICE N°1 (07 pts)

1°) On considère la fonction F définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $F(x)=\int_0^{\sin x}\sqrt{1-t^2}\,dt$

a- Montrer que F est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et calculer sa fonction dérivé

b- Montrer que pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ on a: $F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x)$

2°) Pour tout entier naturel non nul, on pose : $I_n=\int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}\,dt$ pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $I_0=\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt$

a- Calculer I_0 et I_1

b- Montrer , en utilisant une intégration par parties, que pour tout $n\geq 1$ on a : $I_{n+1}=\frac{n}{n+3}I_{n-1}$

c- Calculer alors : I_2 et I_3

3°) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a: $0\leq I_n\leq\frac{1}{n+1}$ puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

EXERCICE N°2 (07 pts)

Soit ABC un triangle équilatéral direct inscrit dans un cercle ζ de centre O.

Soit I le point diamétralement opposé à C sur ζ .

1°) Montrer que triangle OAI est équilatéral direct.

2°) Soit f la similitude directe tels que : $f(I)=O$ et $f(C)=B$

a- Déterminer le rapport et un angle de f.

b- Soit Ω le centre de f. Montrer que Ω est un point commun aux cercles circonscrits aux triangles IOA et BOC. Puis déduire une construction de Ω .

3°) a- Montrer que f transforme la droite (AI) en (OA) et la droite (AC) en (BC).

c- Déduire que l'image A' du point A par f est le milieu du segment [BC]

4°) Soit r la rotation de centre O tel que : r (A) = C et h l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$

Montrer que $f=h\circ r$

5°) Soit g la similitude indirecte tels que : $g(I)=O$ et g(C)=B

a- Déterminer le rapport de g

b- Montrer que : $g(B)=A'$.

c- On désigne par J le centre de g. Montrer que : $\overrightarrow{JC}=4\overrightarrow{JA'}$

d- Montrer que l'axe Δ est la perpendiculaire à (BC) en J.

EXERCICE N°3 **06 pts**

Dans le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ *on considère la courbe* $\mathscr{H}$ *d'équation :*

$$-\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

1°) a- Préciser la nature de $\mathscr{H}$ *et déterminer ses éléments caractéristiques.*

b- Tracer $\mathscr{H}$

2°) Pour tout réel $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *, on considère les points* $M_\alpha\left(1+2\tan\alpha,\frac{3}{\cos\alpha}\right)$

a- Vérifier que $M_\alpha \in \mathscr{H}$

b- Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à $\mathscr{H}$ *au point* M_α.

c- Déterminer les coordonnées des points M_0 *et* $M_{\frac{\pi}{4}}$

d- Calculer le volume du solide de révolution obtenue par la rotation de l'arc $\overset{\frown}{M_0M_{\frac{\pi}{4}}}$ *au tour de l'axe des abscisses.*

BON TRAVAIL