LYCEE DE SBEITLA ❀❀❀ Devoir de contrôle n°1	PROF : BELLILI- MONGI Le : 02-11-2013 Durée : 02 heures	Classe : $4^{ème}$ Math1

EXERCICE N°1 (02,25 pts)

Répondre par vrai ou faux en justifiant votre réponse.

1°) Soit (U_n) une suite à termes non nuls ; si (U_n) converge alors la suite $\left(\frac{1}{U_n^2}\right)$ est convergente

2°) Soit n un entier naturel. $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ est réel strictement positif si et seulement si, n est un multiple de 12

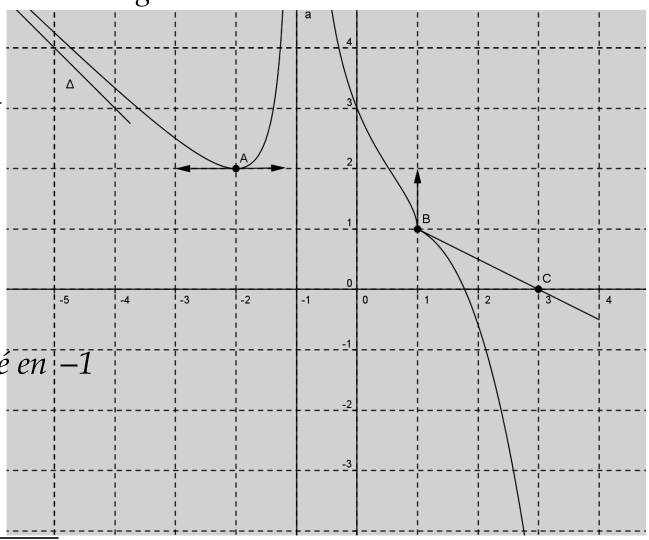
3°) Le nombre complexe : $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$ est une racine $9^{ième}$ de l'unité

EXERCICE N°2 (05,5 pts)

1°) Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

On a tracé la courbe représentative ζ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}/\{-1\}$

- La droite $\Delta : y=-x-1$ est une asymptote de ζ au voisinage de $-\infty$
- ζ admet une tangente horizontale au point $A(-2,2)$
- ζ admet une demi-tangente verticale au point $B(1,1)$
- $[BC)$ est une demi-tangente à ζ
- La droite d'équation : x = - 1 est une asymptote de ζ
- ζ admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisinage de $+\infty$



Répondre graphiquement aux questions suivantes :

a- Déterminer : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-1}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to-2}\frac{f(x)-2}{x+2}$ et $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-1}{x-1}$

b- Montrer que l'équation : $f(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}/\{-1\}$ une unique solution α

c- La fonction $\frac{1}{f}$ admet-elle un prolongement par continuité en -1

2°) On considère la fonction g définie par : $g(x)=\begin{cases} 3x+\sqrt{x^2+3} & \text{, si } x\le-1 \\ \dfrac{-x+\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x+1} & \text{, si } x>-1\end{cases}$

a- Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$

b- Montrer que pour tout $x\in\left]-1,+\infty\right[$ on a : $-1\le g(x)\le\frac{1-x}{1+x}$ puis déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

c- Vérifier que pour tout $x\in\left]-1,+\infty\right[$ on a : $g(x)=-1+\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)+1}{x+1}$

Puis montrer que g est continue en -1

suite au verso

3°) Déterminer $\lim\limits_{x\to -1} g\circ f(x)$

EXERCICE N°3 05,25 pts

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \dfrac{2}{\sqrt{4-U_n^2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1°) a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ oa n: $1 \le U_n \le \sqrt{2}$

b- Montrer que (U_n) est croissante

c- Montrer que (U_n) est convergente et calculer sa limite

2°) a- Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que: pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a: $U_n = \sqrt{\dfrac{2(n+1)}{(n+2)}}$

b- Retrouver alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

3°) Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par: $V_n = U_0 \times U_1 \times U_2 \times .... \times U_n$

a- Calculer pour tout n de $\mathbb{N}$, V_n en fonction de n

b- Montrer que pour tout entier $n \ge 3$ on a: $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1} \ge n+2$

c- Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

EXERCICE N°4 07 pts

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

I °) On considère l'application f qui à tout point M du plan d'affixe z distinct de i, on associe le point M' d'affixe z' tel que: $z' = \dfrac{iz+a}{z-i}$, ou $a \in \mathbb{C}$ et on désigne par A et B d'affixes respectives $-i$ et i .

1°) Montrer que les affixes des points invariants par f vérifient l'équation (E) : $z^2 - 2i.z - a = 0$

2°) On pose : $a = 1 - e^{i2\theta}$ avec $\theta \in]0,\pi[$

Résoudre l'équation (E)

3°) On pose: $z_1 = i - ie^{i\theta}$ et $z_2 = i + ie^{i\theta}$ et on considère les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2

a- Déterminer l'ensemble des points M_1 lorsque θ varie dans $]0,\pi[$

b- Montrer que le triangle OM_1M_2 est rectangle en O

c- Déterminer la valeur de θ pour la quelle le triangle OM_1M_2 soit isocèle de sommet principal O

II°) Par la suite, on pose : $a = 0$

A tout point M d'affixe z distinct de – i , on associe le point N son symétrique par rapport à la droite $(O, \vec{u})$ et au point N, on associe le point M' par f

1°) Vérifier que : $z' = \dfrac{i\bar{z}}{\bar{z}-i}$

2°) a- Montrer que pour tout $z \ne -i$, on a: $(z'-i)(\bar{z}-i) = -1$

b- Montrer alors que : $BM' \times AM = 1$ et que $\left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM'}}\right) \equiv \pi\,[2\pi]$

c- Déduire une construction géométrique du point M', image d'un point M appartenant au cercle ζ de centre A et de rayon 1 .

BON TRAVAIL