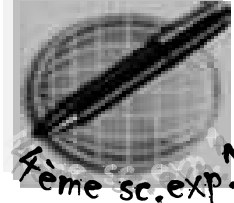




DEVOIR DE CONTROLE N°1

PROF - BELLILI MONGI

DATE : 10 / 11 / 2015, Durée : 2h



EXERCICE N°1 (03 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v})

1°) Le nombre complexe : $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ est une racine quatrième de :

a/ l'unité

b/ i

c/ $-i$

2°) Soit z un nombre complexe non nul d'argument α . Alors un argument de $\frac{z^3}{z}$ est :

a/ 2α

b/ 4α

c/ $\alpha^3 + \alpha$

3°) Soient A et B deux points d'affixes respectives 3 et $3i$.

Alors l'ensemble des points $M(z)$ tel que : $\frac{z-3i}{z-3}$ soit imaginaire pur est :

a/ la droite (AB) privée
des points A et B

b/ Le segment $[AB]$ privé
des points A et B

c/ Le cercle de diamètre $[AB]$
privé des points A et B

4°) On considère les nombres complexes : $a = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$ et $b = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$

a/ $a - b = 0$

b/ $(a - b) \in \mathbb{R}$

c/ $(a - b) \in i\mathbb{R}$

EXERCICE N°2 (04 pts)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = -4x^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2x}\right) + x + 1 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1°) a- Montrer que pour tout $x < 0$ on a : $-4x^2 + x + 1 \leq f(x) \leq x + 1$

b- Déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

2°) Etudier la continuité de f en 0

3°) Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

4°) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in [0, 1]$.

EXERCICE N°3 (05 pts)

Soit la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par: $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = \frac{4U_n - 2}{U_n + 1}$, $n \in \mathbb{N}$.

1°) a- Montrer que pour tout entier naturel n on a : $U_n \geq 2$.

b- Montrer que la suite (U_n) est décroissante .

c- Dédurre que la suite (U_n) converge puis calculer sa limite 1 .

2°) a- Montrer que pour tout entier naturel n on a : $U_{n+1} - 2 \leq \frac{2}{3}(U_n - 2)$

b- Dédurre que pour tout entier n on a : $U_n - 2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

c- Dédurre $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

EXERCICE N°4 (08 pts) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$

I/ 1°) a- Calculer : $(\sqrt{3} + 2i)^2$

b- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 - i4\sqrt{3} = 0$

2°) On considère le point A d'affixe: $a = 2\sqrt{3} + 2i$

a - Mettre sous forme exponentielle a .

b- Placer le point A

3°) On considère le nombre complexe : $u = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$

a- Calculer u^2

b- Dédurre la forme exponentielle de u

c- Déterminer les valeurs de : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

II/ Soient I le point d'affixe 1

A tout point M d'affixe z non nul, on associe le point M' d'affixe z' tel que: $z' = \frac{z}{z}$

1°) Montrer que : $z' \cdot \overline{z'} = 1$ puis interpréter géométriquement le résultat.

2°) Montrer que les vecteurs $\overline{IM'}$ et \overline{OM} sont orthogonaux

3°) Construire alors le point M', image d'un point M distinct de O donné.

