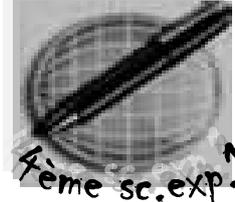




# DEVOIR DE CONTRÔLE N°1

PROF - BELLILI MONGI

DATE : 10 / 11 / 2015, Durée : 2h



## EXERCICE N°1 (03 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$

1°) Le nombre complexe :  $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$  est une racine quatrième de :

a/ l'unité

b/  $i$

c/  $-i$

2°) Soit  $z$  un nombre complexe non nul d'argument  $\alpha$ . Alors un argument de  $\frac{z^3}{z}$  est :

a/  $2\alpha$

b/  $4\alpha$

c/  $\alpha^3 + \alpha$

3°) Soient  $A$  et  $B$  deux points d'affixes respectives  $3$  et  $3i$ .

Alors l'ensemble des points  $M(z)$  tel que :  $\frac{z-3i}{z-3}$  soit imaginaire pur est :

a/ la droite  $(AB)$  privée

b/ Le segment  $[AB]$  privé

c/ Le cercle de diamètre  $[AB]$

des points  $A$  et  $B$

des points  $A$  et  $B$

privé des points  $A$  et  $B$

4°) On considère les nombres complexes :  $a = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$  et  $b = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$  avec  $n \in \mathbb{Z}$

a/  $a-b=0$

b/  $(a-b) \in \mathbb{R}$

c/  $(a-b) \in i\mathbb{R}$

## EXERCICE N°2 (04 pts)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = -4x^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2x}\right) + x + 1 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1°) a- Montrer que pour tout  $x < 0$  on a :  $-4x^2 + x + 1 \leq f(x) \leq x + 1$

b- Déduire  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

2°) Etudier la continuité de  $f$  en  $0$

3°) Calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

4°) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet au moins une solution  $\alpha \in [0, 1]$ .

**EXERCICE N°3 (05 pts)**

Soit la suite  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par:  $U_0 = 3$  et  $U_{n+1} = \frac{4U_n - 2}{U_n + 1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

1°) a- Montrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $U_n \geq 2$ .

b- Montrer que la suite  $(U_n)$  est décroissante .

c- Dédurre que la suite  $(U_n)$  converge puis calculer sa limite 1 .

2°) a- Montrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $U_{n+1} - 2 \leq \frac{2}{3}(U_n - 2)$

b- Dédurre que pour tout entier  $n$  on a :  $U_n - 2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

c- Dédurre  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

**EXERCICE N°4 (08 pts)** Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ 

I/ 1°) a- Calculer :  $(\sqrt{3} + 2i)^2$

b- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 - i4\sqrt{3} = 0$

2°) On considère le point A d'affixe:  $a = 2\sqrt{3} + 2i$

a - Mettre sous forme exponentielle  $a$  .

b- Placer le point A

3°) On considère le nombre complexe :  $u = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$

a- Calculer  $u^2$

b- Dédurre la forme exponentielle de  $u$

c- Déterminer les valeurs de :  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

II/ Soient I le point d'affixe 1

A tout point  $M$  d'affixe  $z$  non nul, on associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que:  $z' = \frac{z}{z}$

1°) Montrer que :  $z' \cdot \overline{z'} = 1$  puis interpréter géométriquement le résultat.

2°) Montrer que les vecteurs  $\overline{IM'}$  et  $\overline{OM}$  sont orthogonaux

3°) Construire alors le point  $M'$ , image d'un point  $M$  distinct de  $O$  donné.

