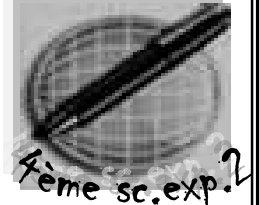




DEVOIR DE CONTROLE N°1

PROF - BELLILI MONGI

DATE : 09 / 11 / 2015, Durée : 2h



EXERCICE N°1 (03 pts)

Pour chacune des questions suivantes, indiquer la réponse exacte.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v})

1°) Soit z un nombre complexe non nul d'argument α . Alors un argument de $\bar{z}.z^3$ est :

a/ 2α

b/ $-\alpha^4$

c/ $\alpha^3 - \alpha$

2°) L'ensemble des points $M(z)$ tel que : $(z-i)(\bar{z}+i) = 2$ est :

a/ Une droite

b/ Un point

c/ Un cercle

3°) soit z un nombre complexe de module 3. Alors le conjugué de z est :

a/ $\frac{9}{z}$

b/ $\frac{3}{z}$

c/ $\frac{1}{z}$

4°) La limite lorsque n tend vers $+\infty$ de : $\frac{1-2^n}{1+\sqrt{3}^n}$ est égale à :

a/ -1

b/ $\frac{-2}{\sqrt{3}}$

c/ $-\infty$

EXERCICE N°2 (05 pts)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{3x - \sin 2x}{x} & ; \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x^2 - x + 1} - x & ; \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1°) a- Montrer que pour tout $x < 0$ on a : $\frac{3x+1}{x} \leq f(x) \leq \frac{3x-1}{x}$ puis déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

b- Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$

2°) Etudier la continuité de f en 0 puis justifier f est continue sur \mathbb{R}

3°) Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

4°) Montrer que l'équation : $f(x) = \frac{1}{2}$ admet au moins une solution $\alpha \in [0, 1]$

EXERCICE N°3 (05 pts)

Soit la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par: $U_0 = 4$ et $U_{n+1} = \frac{4U_n - 3}{U_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

- 1°) a- Montrer que pour tout entier naturel n on a : $U_n \geq 3$.
- b- Montrer que la suite (U_n) est décroissante .
- c- Dédurre que la suite (U_n) converge puis calculer sa limite 1 .
- 2°) a- Montrer que pour tout entier n on a : $U_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{3}(U_n - 3)$
- b- Dédurre que pour tout entier n on a : $U_n - 3 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$
- c- Dédurre $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

EXERCICE N°4 (07 pts) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$

I/ 1°) a- Calculer : $(2+i)^2$

b- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $iz^2 + 2i\sqrt{2}z + 8i - 8 = 0$

2°) On considère le point A : $z_A = -2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$

a – Mettre sous forme exponentielle z_A

b- Placer le point A

3°) On considère le nombre complexe : $a = \sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}$

a- Mettre a^2 puis a sous forme exponentielle

b- Déterminer les valeurs de : $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

4°) On considère le nombre complexe : $b = 4 + z_A$. Déterminer le module et un argument de b

III/ Soient les points I , J et K d'affixes respectives 1 , i et - 1.

A tout point M d'affixe $z \neq i$, on associe le point M' d'affixe z' tel que: $z' = \frac{z-i}{z+i}$

1°) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{KM'}$ et \overrightarrow{JM} sont colinéaires

2°) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IM'}$ et \overrightarrow{JM} sont orthogonaux

3°) Construire alors le point M' image d'un point M donné distinct de J