LYCEE SBEITLA

DEVOIR DE CONTROLE N°1

PROF – BELLILI MONGI

DATE : 09 / 11 / 2015, Durée : 2h

4ème sc.exp.2

EXERCICE N°1 (03 pts) Pour chacune des questions suivantes, indiquer la réponse exacte.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

1°) Soit z un nombre complexe non nul d'argument α . Alors un argument de $\bar{z}.z^3$ est :

a/ 2α b/ $-\alpha^4$ c/ $\alpha^3-\alpha$

2°) L'ensemble des points M(z) tel que : $(z-i)\left(\bar{z}+i\right)=2$ est :

a/ Une droite b/ Un point c/ Un cercle

3°) soit z un nombre complexe de module 3. Alors le conjugué de z est :

a/ $\dfrac{9}{z}$ b/ $\dfrac{3}{z}$ c/ $\dfrac{1}{z}$

4°) La limite lorsque n tend vers $+\infty$ de : $\dfrac{1-2^n}{1+\sqrt{3}^n}$ est égale à :

a/ -1 b/ $\dfrac{-2}{\sqrt{3}}$ c/ $-\infty$

EXERCICE N°2 (05 pts)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x-\sin 2x}{x} & ;\text{ si } x<0\\ \sqrt{x^2-x+1}-x & ;\text{ si } x\geq 0\end{cases}$

1°) a- Montrer que pour tout x < 0 on a : $\dfrac{3x+1}{x}\leq f(x)\leq\dfrac{3x-1}{x}$ puis déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b- Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$

2°) Etudier la continuité de f en 0 puis justifier f est continue sur $\mathbb{R}$

3°) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

4°) Montrer que l'équation : $f(x)=\dfrac{1}{2}$ admet au moins une solution $\alpha\in[0,1]$

EXERCICE N°3 (05 pts)

Soit la suite (U_n) définie sur IN par: $U_0 = 4$ et $U_{n+1} = \dfrac{4U_n - 3}{U_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

1°) a- Montrer que pour tout entier naturel n on a : $U_n \geq 3$.

b- Montrer que la suite (U_n) est décroissante .

c- Déduire que la suite (U_n) converge puis calculer sa limite l.

2°) a- Montrer que pour tout entier n on a : $U_{n+1} - 3 \leq \dfrac{1}{3}(U_n - 3)$

b- Déduire que pour tout entier n on a : $U_n - 3 \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

c- Déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

EXERCICE N°4 (07 pts) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

I/ 1°) a- Calculer : $(2+i)^2$

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $iz^2 + 2i\sqrt{2}z + 8i - 8 = 0$

2°) On considère le point A : $z_A = -2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$

a – Mettre sous forme exponentielle z_A

b- Placer le point A

3°) On considère le nombre complexe : $a = \sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}$

a- Mettre a^2 puis a sous forme exponentielle

b- Déterminer les valeurs de : $\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$

4°) On considère le nombre complexe : $b = 4 + z_A$. Déterminer le module et un argument de b

II/ Soient les points I , J et K d'affixes respectives 1 , i et - 1.

A tout pont M d'affixe $z \neq i$, on associe le point M ' d'affixe z' tel que: $z' = \dfrac{z-i}{z+i}$

1°) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{KM'}$ et $\overrightarrow{JM}$ sont colinéaires

2°) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IM'}$ et $\overrightarrow{JM}$ sont orthogonaux

3°) Construire alors le point M' image d'un point M donné distinct de J