Epreuve Mathématiques Lycée sbeitla

DEVOIR DE MAISON N°1

$4^{ième}$ SC.EXP

Professeur Bellili Mongi Janvier 2018

EXERCICE N°1

Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par : $f(x)=-1+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

1°)a- Dresser le tableau de variation de

b- Montrer que l'équation f(x) = x admet dans $]-1,1[$ une unique solution α puis vérifier que $\dfrac{4}{5}<\alpha$

c- Donner le signe de f(x) – x suivant les valeurs de x

d- tracer sa courbe représentative ζ_f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

2°) a- Montrer que réalise une bijection de $]-1,1[$ sur un intervalle I que l'on précisera

b- tracer la courbe représentative de $\zeta_{f^{-1}}$ dans le même repère

c-Montrer que pour tout $x\in I$ on a : $f^{-1}(x)=\dfrac{1+x}{\sqrt{1+(1+x)^2}}$

3°) On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0\in[0,\alpha]$ et $U_{n+1}=f^{-1}(U_n)$; $n\in\mathbb{N}$

a- Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$,on a : $0\le U_n\le\alpha$

b- Montrer que le suite U est croissante

c- Déduire que U converge et déterminer sa limite

4°) a- Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$ on a : $\left|(f^{-1})'(x)\right|\le\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

b- Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $\left|U_{n+1}-\alpha\right|\le\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left|U_n-\alpha\right|$

c- Déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $\left|U_n-\alpha\right|\le\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n\left|U_0-\alpha\right|$ puis retrouver la limite de U

EXERCICE N°2

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\tan^2 x$

1°) a- Montrer que f est une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle que l'on déterminera

b- On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f

Calculer : $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(3)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x)$

2°) Montrer que f^{-1}est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$

3°) Pour tout $x\in]0,+\infty[$, on pose : $g(x)=f^{-1}\left(x^2\right)+f^{-1}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

a- Calculer : $g(1)$

b- Montrer que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $g'(x)$

c- En déduire que pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a : $g(x)=\dfrac{\pi}{2}$

EXERCICE N°3

***1°)**a- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$*

b- Ecrire les solutions sous forme exponentielle

***2°)** Pour tout $z\in\mathbb{C}$; on pose : $P(z)=z^3-2(\sqrt{3}+i)z^2+4(1+i\sqrt{3})z-8i$*

a- Montrer que le nombre complexe : $z_0=2i$ est une racine de l'équation : P(z) = 0

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : P(z) = 0

***3°)** Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$,*

On donne les points : $A(\sqrt{3}-i)$; $b(\sqrt{3}-i)$ et $C(2i)$

a- Placer les points A , B et C

b- Montrer que le quadrilatère OABC est un losange

EXERCICE N°4

Soit OABCDEFG un cube d'arrête 1. On rapporte l'espace au repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)$

Soit α un réel supérieur ou égal à 1 . On considère les points L, M et K définies par :

$\overrightarrow{OM}=\alpha\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OL}=\alpha\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{BK}=\alpha\overrightarrow{BF}$

***1°)** a- Déterminer les coordonnée des points M, L, B et K*

b- Déterminer les compsantes du vecteur : $\vec{U}=\overrightarrow{DM}\wedge\overrightarrow{DL}$

c- En déduire, en fonction de α , l'aire du triangle DML

d- Calculer, en fonction de α , le volume du tétraèdre DMLK

e- Calculer le volume du tétraèdre DACF.

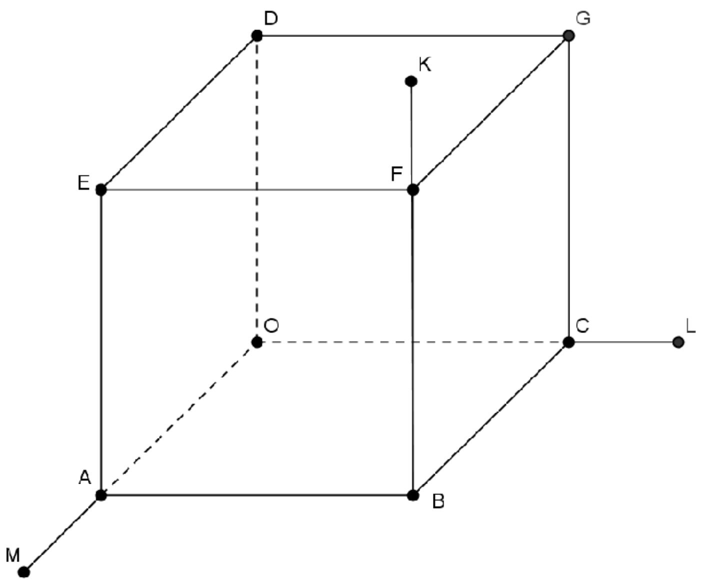
***2°)** a- Montrer que la droite (OK) est perpendiculaire au plan (DML)*

b- La droite (OK) coupe le plan (DML) en H. Montrer que : $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OK}$

c- Soit λ le réel tel que : $\overrightarrow{OH}=\lambda.\overrightarrow{OK}$. Montrer que : $\lambda=\dfrac{\alpha}{\alpha^2+2}$

d- Montrer que : $\overrightarrow{HK}=(1-\lambda).\overrightarrow{OK}$ puis déduire que : $HK=\dfrac{\alpha^2-\alpha+2}{\sqrt{\alpha^2+2}}$

e- Retrouver alors le volume du tétraèdre DMLK



BON TRAVAIL

EXERCICE N°3

1°) Résoudre l'équation : $z^2-2(1+i)z+4i=0$

2°) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère les points A , B et C d'affixes respectives : $z_A=2$, $z_B=2+2i$ et $z_C=2+\sqrt{3}+i$

a- Montrer que : $z_C-z_A=\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})(z_B-z_A)$

b- Mettre sous forme exponentielle le nombre complexe : $1-i\sqrt{3}$

c- Montrer alors que ABC est un triangle équilatéral

d- Placer les points A, B et C

e- Soit D le symétrique de A par rapport à (BC) . montrer que ABDC est un losange et calculer son aire