LYCEE DE SBEITLA

Mathématiques

SECTION : 4-IÈME MATHÉMATIQUES

devoir de synthèse n° 2

Durée de l'épreuve: 4 heures - Coefficient : 4

Professeur : Dhaouadi Nejib

Date : 01/03/2010

WWW.SIGMATHS.TK

Ce devoir comporte 4 pages de 1/4 à 4/4

Exercice n°1 (4 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
L'élève doit indiquer sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
1 point pour une réponse correcte, 0 point pour une réponse fausse ou absence de réponse.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, *On considère la conique* $\mathscr{C}$ *de foyer F, de directrice D, d'excentricité e et d'équation:*
$9x^2+25y^2-18x+150y+9=0$

1)	a) $\mathscr{C}$ est une ellipse	b) $\mathscr{C}$ est une hyperbole	c) $\mathscr{C}$ est une parabole
2)	a) $F(3,3)$	b) $F(4,0)$	c) $F(5,-3)$
3)	a) $D : x=\frac{29}{4}$	b) $D : x=\frac{25}{4}$	c) $D : x=\frac{21}{4}$
4)	a) $e=\frac{5}{4}$	b) $e=\frac{4}{5}$	c) $e=\frac{3}{5}$

Exercice n°2 (6 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, *on considère la parabole P d'équation* $y^2=2px$ $(p>0)$. *On désigne par F son foyer et D sa directrice.*
$M(x_0,y_0)$ *un point de cette parabole distinct de O, H son projeté orthogonal sur D et T la médiatrice du segment* $[FH]$.

1) *Donner les coordonnés du foyer F et une équation de la directrice D.*
2) *Montrer que T est la tangente à la parabole P au point M.*
   (On pourra déterminer une équation cartésienne de T)
3) *T coupe D en un point I.*
   a) *Montrer que I admet pour coordonnées* $\left(-\frac{p}{2},\frac{p}{y_0}\left(x_0-\frac{p}{2}\right)\right)$.
   b) *En déduire que le triangle MFI est rectangle en F.*
   c) *Déduire alors une méthode pour construire la tangente à une parabole en un point M.*

4) La droite (MF) recoupe la parabole P en un point M'. On note H' le projeté orthogonal de M' sur D et T' la tangente à P en M'.

a) Vérifier que $T' = (M'I)$.

b) Montrer que I est le milieu du segment $[HH']$ et que le triangle HFH' est rectangle en F.

c) En déduire que les tangentes T et T' sont perpendiculaires en I.

5) *<u>Etude de la réciproque</u>*

Soient T et T' deux tangentes à la parabole P respectivement en deux points M et M'.
On désigne par H et H' les projetés orthogonaux respectifs de M et M' sur D.
On rappelle, d'après 2), que les tangentes T et T' sont respectivement les médiatrices des segments $[FH]$ et $[FH']$.

On suppose dans la suite que T et T' sont perpendiculaires en un point I.

a) Déterminer $S_{T'} o S_T(H)$.

b) En déduire que $I \in D$.

Problème (10 points)

On considère les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad et \quad F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

Partie A

1) *a) Prouver que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et expliciter $F'(x)$ pour tout réel x.*

b) Montrer que F est impaire.

2) *a) En justifiant que $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{1}{1+t^2} \leq \dfrac{2}{(1+t)^2}$, montrer que $\forall x \geq 0$, $F(x) \leq 2$.*

b) En déduire que la fonction F admet une limite L en $+\infty$ et que $L \leq 2$.

3) Montrer que $\forall x \geq 0$, $F(x) \geq \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(1+t)^2}$ et en déduire que $L \geq 1$.

4) Démontrer que l'équation $F(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une seule solution réelle.

5) On pose $G(x) = F(x) + F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

a) Justifier que G est dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$ et calculer $G'(x)$.

b) En déduire que G est une fonction constante que l'on précisera.

c) Montrer alors que $L = 2F(1)$.

6) Soit H la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *par :* $H(x) = F(\tan x)$

a) Montrer que H est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *et Calculer* $H'(x)$

b) En déduire que pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $H(x) = x$

c) Déterminer alors L.

Partie B (Etude de la convergence d'une suite)

Soit (u_n) *la suite réelle définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par :* $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$

1) Vérifier que pour tout entier naturel n non nul on a : $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$.

a) Montrer que pour tout réel $t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$;

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

b) En déduire que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_0^1 f(t)dt \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

3) a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul on a:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n} \leq u_n \leq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}$$

b) En déduire que la suite (u_n) *est convergente et préciser sa limite.*

Exercice n°1

$$9x^2+25y^2-18x+150y+9=0 \Leftrightarrow 9\left[(x-1)^2-1\right]+25\left[(y+3)^2-9\right]+9=0$$

$$\Leftrightarrow 9(x-1)^2+25(y+3)^2-9-225+9=0 \Leftrightarrow \frac{9(x-1)^2+25(y+3)^2}{225}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y+3)^2}{9}=1 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{5^2}+\frac{(y+3)^2}{3^2}=1$$

$$\frac{(x-1)^2}{5^2}+\frac{(y+3)^2}{3^2}=1$$

Considérons le nouveau repère $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$ *avec* $\Omega(1,-3)$

Si M est un point de coordonnées (x,y) dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ *et de coordonnées (X,Y) dans le nouveau repère* $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$ *alors* $\begin{cases} X=x-1 \\ Y=y+3 \end{cases}$

Ainsi $\dfrac{X^2}{5^2}+\dfrac{Y^2}{3^2}=1$ *est l'équation de* $\mathscr{C}$ *dans le repère* $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$

Donc $\mathscr{C}$ *est une ellipse de foyer F de directrice D et d'excentricité* $e=\dfrac{\sqrt{25-9}}{5}=\dfrac{4}{5}$

<u>Dans le repère</u> $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$: $F(4,0)$; $D: X=\dfrac{25}{4}$

<u>Dans le repère</u> $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$: $F(5,-3)$; $D: x=\dfrac{29}{4}$

On passe au repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ à l'aide du système $\begin{cases} x=X+1 \\ y=Y-3 \end{cases}$

Réponses correctes: 1) a) , 2) c) , 3) a) et 4) b)

Exercice n°2

1) On sait d'après le cours que : $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$ *et* $D: x=-\dfrac{p}{2}$.

2) Soit N(x,y) un point du plan.

$$N\in T \Leftrightarrow NF=NH \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{p}{2}-x\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(-\frac{p}{2}-x\right)^2+(y_0-y)^2}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\frac{p^2}{4}}-px+\cancel{x^2}+\cancel{y^2}=\cancel{\frac{p^2}{4}}+px(+\cancel{x^2}+y_0^{\,2}-2y_0y+\cancel{y^2} \Leftrightarrow 2y_0y-y_0^{\,2}-2px=0$$

$$\Leftrightarrow 2y_0y-2px_0-2px=0 \qquad (y_0^{\,2}=2px_0 \quad car\ M\in P)$$

$$\Leftrightarrow yy_0=p(x+x_0)$$

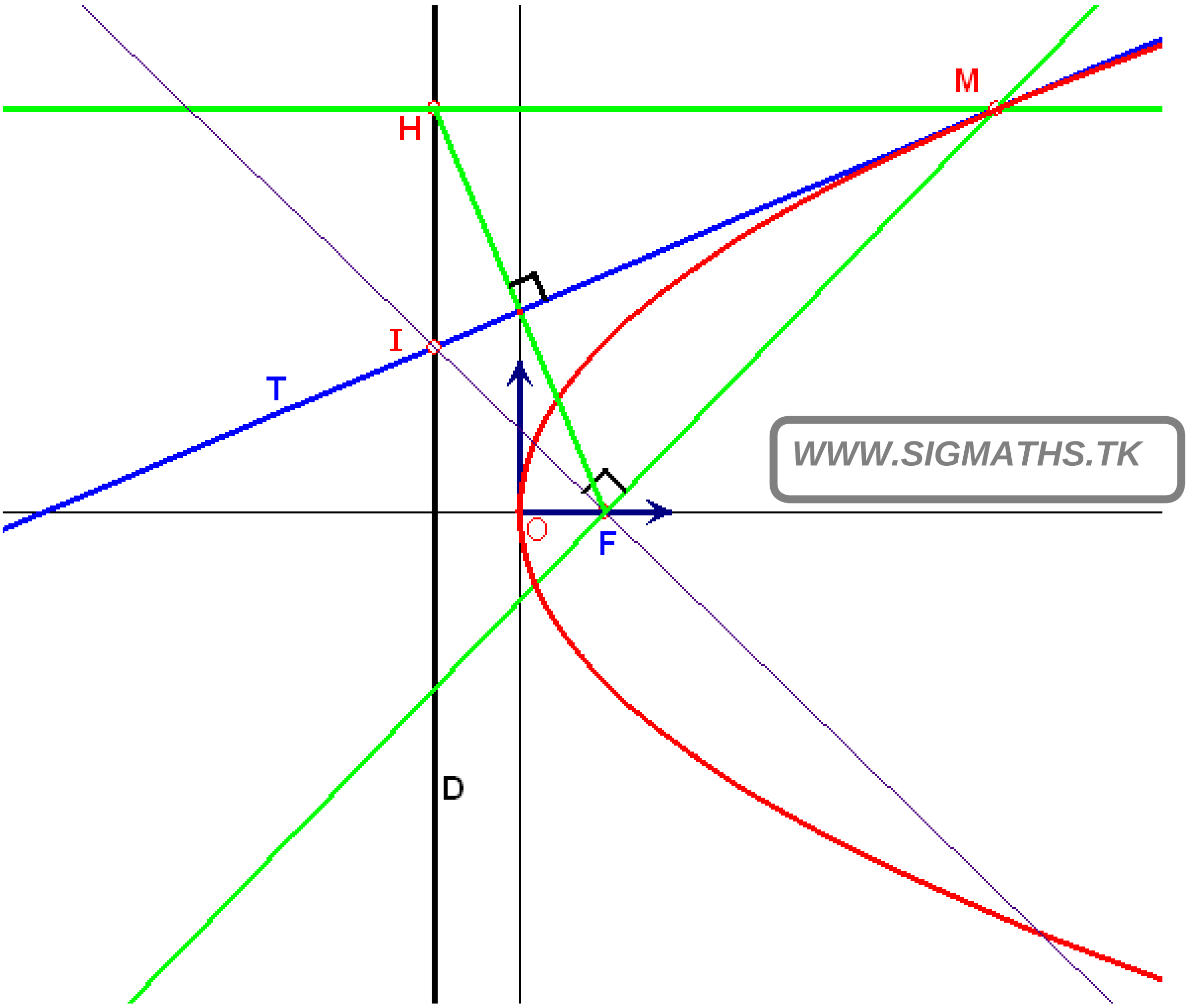
L'équation obtenue est l'équation de la tangente à P au point M.

Donc T est la tangente à P en M.

3) a) $I(x,y) \in D \cap T \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{p}{2} \\ yy_0 = p(x + x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{p}{2} \\ y = \dfrac{p}{y_0}\left(-\dfrac{p}{2} + x_0\right) \end{cases}$ ($y_0 \neq 0$ car $M \neq O$)

b) $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FI} = \begin{pmatrix} x_0 - \dfrac{p}{2} \\ y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -p \\ \dfrac{p}{y_0}\left(x_0 - \dfrac{p}{2}\right) \end{pmatrix} = -p\left(x_0 - \dfrac{p}{2}\right) + \cancel{y_0}\dfrac{p}{\cancel{y_0}}\left(x_0 - \dfrac{p}{2}\right) = 0$

Donc le triangle MFI est rectangle en F



c) Pour construire la tangente à la parabole P au point M, il suffit de construire la perpendiculaire à la droite (MF) passant par F. Cette droite coupe la directrice D en un point I. La tangente à la parabole P au point M, ce n'est que la droite (MI).

4) a) D'après ce qui précède, la perpendiculaire à (M'F) au point F coupe D en I, donc la tangente à P au point M' est la droite (M'I).

b) $I \in T \cap T'$ *donc* $IH = IF = IH'$ *et par suite I est le centre du cercle circonscrit au triangle* HFH' *et puisque* $I \in [HH']$ *donc* $[HH']$ *est un diamètre de ce cercle.*

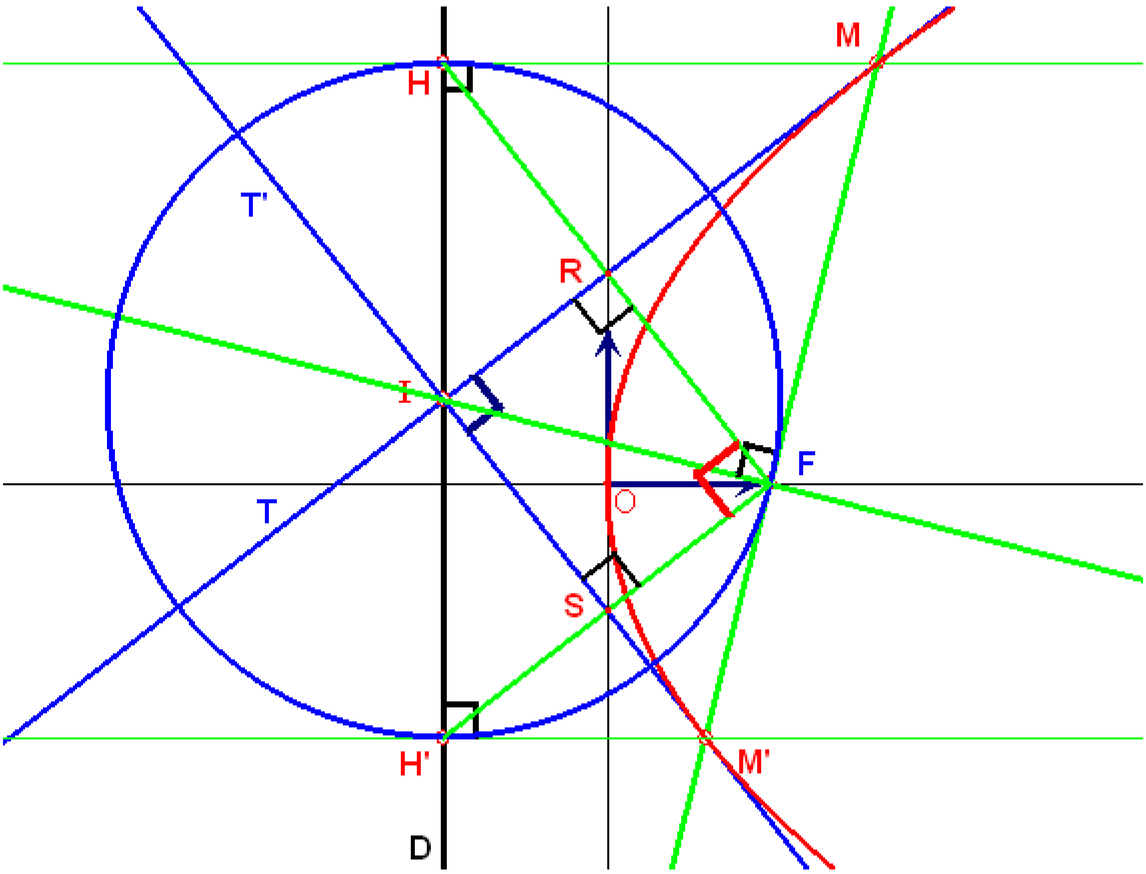
Donc I est le milieu du segment $[HH']$.

$[HH']$ *est un diamètre du cercle circonscrit au triangle* HFH' *donc ce triangle est rectangle en F.*

c) *Posons* $\{R\} = T \cap (HF)$ *et* $\{S\} = T' \cap (H'F)$

Le quadrilatère RFSI admet trois angles droits donc c'est un rectangle.

D'où les tangentes T et T' sont perpendiculaires.



5) a) $\begin{cases} T = med[FH] \\ T' = med[FH'] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_T(H) = F \\ S_{T'}(F) = H' \end{cases}$

D'où $S_{T'} o S_T(H) = H'$

b) $\begin{cases} T \perp T' \\ T \cap T' = \{I\} \end{cases}$ *donc* $S_{T'} o S_T$ *est la symétrie centrale de centre I*

Et puisque $S_{T'} o S_T(H) = H'$ *alors I est le milieu du segment* $[HH']$

Donc $I \in D$.

Problème

Partie A

1) a) f est continue sur $\mathbb{R}$ donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$F'(x) = f(x)$ (Résultat de cours).

b) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = F(-x) + F(x)$

F étant dérivable sur $\mathbb{R}$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :

$g'(x) = -F'(-x) + F'(x) = -f(-x) + f(x) = 0$ car f est une fonction paire.

Alors g est constante sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a : $g(x) = g(0) = 2F(0) = 0$

Donc pour tout réel x, $F(-x) = -F(x)$

D'où F est une fonction impaire.

2) a) $\dfrac{1}{1+t^2} - \dfrac{2}{(1+t)^2} = \dfrac{(1+t)^2 - 2(1+t^2)}{(1+t^2)(1+t)^2} = \dfrac{-1+2t-t^2}{(1+t^2)(1+t)^2} = \dfrac{-(t-1)^2}{(1+t^2)(1+t)^2} \leq 0$

Donc $\dfrac{1}{1+t^2} \leq \dfrac{2}{(1+t)^2}$

Soit $x \geq 0$.

Pour tout réel $t \in [0, x]$, $\dfrac{1}{1+t^2} \leq \dfrac{2}{(1+t)^2}$ donc $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \leq \int_0^x \frac{2dt}{(1+t)^2}$

Ce qui donne $F(x) \leq \left[\dfrac{-2}{1+t}\right]_0^x$ ou encore $F(x) \leq 2 - \dfrac{2}{1+x} \leq 2$ donc $F(x) \leq 2$.

b) Pour tout réel x, $F'(x) = f(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

F est croissante et majorée sur $\mathbb{R}$ donc F admet une limite finie L en $+\infty$.

$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ F(x) \leq 2 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = L \end{cases}$ donc par passage à la limite on obtient $L \leq 2$

3) Pour tout réel $t \geq 0$, $1 + t^2 \leq 1 + 2t + t^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{(1+t)^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2}$

Soit $x \geq 0$, Pour tout réel $t \in [0, x]$, $\dfrac{1}{(1+t)^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2}$.

Donc $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(1+t)^2} \leq \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ ce qui donne $F(x) \geq 1 - \dfrac{1}{1+x}$

Par passage à la limite en $+\infty$, on obtient $L \geq 1$.

4) F continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $F(\mathbb{R})$ avec $F(\mathbb{R}) = \left]\lim_{x\to-\infty} F(x), \lim_{x\to+\infty} F(x)\right[$

Or $\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} -F(-x) = -\lim_{X\to+\infty} F(X) = -L$ donc $F(\mathbb{R}) =]-L, L[$

Or $L \geq 1$ donc $\frac{1}{2} \in]-L, L[$ et par suite l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ admet une seule solution réelle.

5) a) F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $\mathbb{R}^*_+$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^*_+$

Donc d'après le théorème de la dérivabilité de la composée, la fonction $x \mapsto F\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$ et par suite G est dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$.

Pour tout réel strictement positif x,

$$G'(x) = F'(x) - \frac{1}{x^2} F'\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) - \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = 0$$

b) Pour tout réel strictement positif x, $G'(x) = 0$

Donc il existe une constante c telle que pour tout réel $x > 0$, $G(x) = c$.

Or $G(1) = 2F(1)$ donc <u>Pour tout réel strictement positif x, $G(x) = 2F(1)$</u>

c) Pour tout réel strictement positif x, $F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) = 2F(1)$

Par passage à la limite en $+\infty$ et puisque F est continue en 0 et F(0)=0, on obtient $L = 2F(1)$.

6) H la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $H(x) = F(\tan x)$

a)

$$\begin{cases} \text{La fonction tan est dérivable sur } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

Donc H est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $H'(x) = (1+\tan^2 x)\frac{1}{1+\tan^2 x} = 1$

b) $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ H'(x)=1$ donc il existe une constante c telle que

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ H(x)=x+c$$

Pour déterminer la constante c, il suffit de prendre $x=0$

$H(0)=F(0)=0=0+c \Rightarrow c=0$. Donc $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ H(x)=x$

c) $L=2F(1)=2H\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

Partie B

(u_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$.

1) $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^2}{n^2+k^2}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=u_n$

2) a) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ f'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\le 0$

Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Alors $\quad \forall t\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right],\quad f\left(\frac{k+1}{n}\right)\le f(t)\le f\left(\frac{k}{n}\right)$

Donc $\quad \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right)dt \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)dt$

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\le\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt\le\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

b) $\quad \forall k\in\{0,1,\cdots,n-1\},\quad \frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\le\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt\le\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$

Faisant la somme membre à membre, on obtient :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right)\le\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt\le\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Ou encore $\quad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right)\le\int_0^1 f(t)dt\le\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

3) a) D'après ce qui précède , $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \le \int_0^1 f(t)dt \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(1\right)\right) \le F(1) \le \frac{1}{n}\left(f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)-f(0)\right) \le F(1) \le \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)-f(1)\right)$$

$$\Leftrightarrow u_n - \frac{1}{n} \le F(1) \le u_n - \frac{1}{2n} \quad donc \quad u_n \le \frac{\pi}{4}+\frac{1}{n} \quad et \quad u_n \ge \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2n}$$

Ou encore $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2n} \le u_n \le \frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2n} \le u_n \le \frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}$ *et* $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2n}\right) = \frac{\pi}{4}$

Donc d'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) *est convergente et elle converge vers* $\frac{\pi}{4}$