

Epreuve

Mathématiques

Durée : 2H

Devoir de synthèse n°1

Classe : 4^{ème} ScExp

Professeur

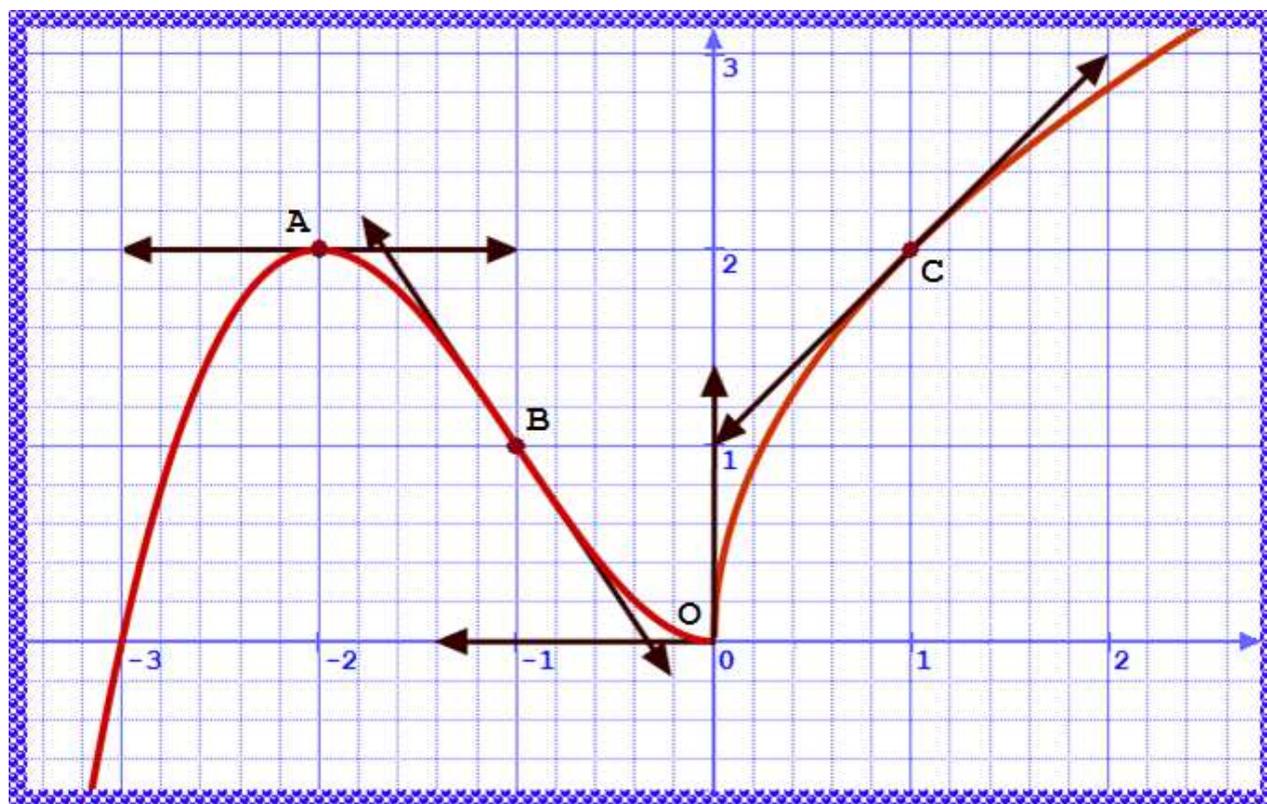
Dhaouadi
Nejib

Décembre 2015

Exercice 1 (3 points)

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} .

On donne ci-dessous la représentation graphique \mathcal{C} de la fonction f , dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , ainsi que les tangentes ou demi-tangentes aux points O, A, B et C .



Répondre, par vrai ou faux à chacune des propositions données.

Aucune justification n'est demandée.

1) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - 2}{x + 2} = 0$.

2) $f([-3, -1]) = [0, 1]$.

3) f est dérivable sur l'intervalle $[-3, 0]$.

4) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{f(x)} = +\infty$.

5) C est un point d'inflexion pour la courbe \mathcal{C} .

6) $f'(-1) = \frac{3}{2}$.

Exercice 2 (9 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 2 - \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

1) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter les résultats trouvés.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{-1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$.

b) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]-\infty, 0[$.

c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

d) Dresser le tableau de variation de f .

e) Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet, dans $]0, +\infty[$, une solution unique α et que $\alpha \in]1, 2[$.

4) Considérons la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par : $U_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq U_n \leq 2$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |U_n - \alpha|$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |U_0 - \alpha|$.

d) En déduire que la suite (U_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice 3 (8 points)

Soit θ un réel de l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$.

On pose $P(z) = z^3 - 2(2 \cos \theta + i)z^2 + 4(1 + 2i \cos \theta)z - 8i$

1) Vérifier que $z_0 = 2i$ est une solution de l'équation $P(z) = 0$.

2) a) Montrer que pour tout nombre complexe z on a : $P(z) = (z - 2i)(z^2 - 4 \cos \theta + 4)$.

b) Achever alors la résolution de l'équation $P(z) = 0$. On notera z_1 et z_2 les autres solutions tels que $\text{Im}(z_1) > 0$.

c) Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

3) Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On désigne par A, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2 .

a) Vérifier que les points A, M_1 et M_2 appartiennent à un même cercle de centre O .

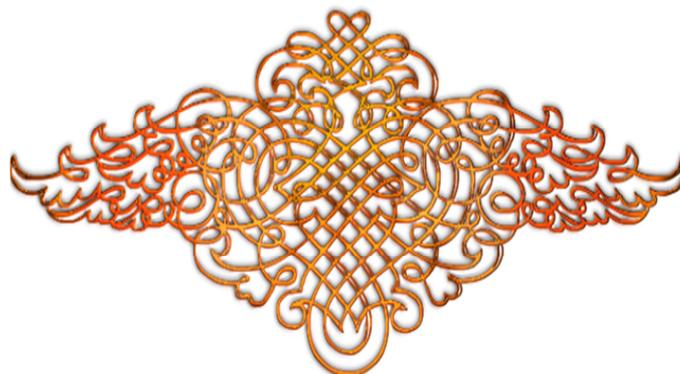
b) Déterminer le réel θ_0 pour lequel OAM_1M_2 est un parallélogramme et vérifier que ce parallélogramme est un losange.

c) Vérifier que pour $\theta = \theta_0$, z_0, z_1 et z_2 sont des racines sixièmes de -64 .

d) Soient I et J les milieux respectifs des segments $[OM_1]$ et $[AM_2]$.

Montrer que si θ varie dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{\theta_0\}$, la droite (IJ) reste parallèle à une direction fixe que l'on précisera.

BON TRAVAIL



Exercice 1

1) **Vrai** : La courbe \mathcal{C} admet, au point $B(-2,2)$, une tangente horizontale

Donc f est dérivable en -2 et $f'(-2) = 0$

$$\text{Or } f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} \text{ ce qui donne enfin } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - 2}{x + 2} = 0$$

2) **Faux** : $f([-3, -1]) = [0, 2]$.

3) **Vrai** : f est dérivable sur l'intervalle $[-3, 0[$ et dérivable à gauche en 0 (demi tangente horizontale à gauche en 0).

4) **Faux** : f dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'_g(0) = 0$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ en plus sur l'intervalle }]-1, 0[\frac{f(x)}{x} < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = 0^-$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\frac{f(x)}{x}} = -\infty$$

5) **Faux** : La courbe ne traverse pas sa tangente en C .

6) **Faux** : $f'(-1) = -\frac{3}{2}$

Exercice 2

$$1) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cancel{2} - \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 1}} - \cancel{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

Donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{2} - \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 1}} - \cancel{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\cancel{x}}{\cancel{x} \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-1}{\sqrt{1}} = -1$$

Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = -1$.

Conclusion : f dérivable à gauche et à droite en 0 mais $f'_g(0) \neq f'_d(0)$

Donc f n'est pas dérivable en 0 .

Interprétation : La courbe représentative de f admet, à gauche (resp. à droite), au point d'abscisse 0 une demi tangente de coefficient directeur 1 (resp. -1)

2) a) Si $x \in]0, +\infty[$ alors $f(x) = 2 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

$$\text{Donc } f'(x) = -\frac{1 \cdot \sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2} = -\frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = -\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{-1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

b) Si $x \in]-\infty, 0[$ alors $f(x) = 2 - \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}} = 2 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Donc

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$c) \lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} 2 - \frac{|x|}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} 2 - \frac{|x|}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 2 - \frac{1}{1} = 1.$$

c - à - d $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$

d)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	1 -1	$-$
$f(x)$	1	2	1

e) $x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 2$ et $\sqrt{x^2+1} \geq \sqrt{2}$ donc $(x^2+1)\sqrt{x^2+1} \geq 2\sqrt{2}$

Ce qui conduit à : $0 < \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ou encore $|f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

3) On pose $g(x) = f(x) - x$ pour $x \in]0, +\infty[$. $f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$

$$\begin{cases} g \text{ continue sur } [1, 2] \\ g(1) \times g(2) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) < 0 \end{cases} \implies \begin{cases} L' \text{ \u00e9quation } g(x) = 0 \text{ admet au moins une} \\ \text{solution } \alpha \in]1, 2[. \end{cases}$$

f est d\u00e9rivable sur $]0, +\infty[$ donc g est d\u00e9rivable sur $]0, +\infty[$ et $g'(x) = f'(x) - 1$.

Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) < 0$ donc $g'(x) < 0 \Rightarrow g$ strictement d\u00e9croissante sur $]0, +\infty[$

Donc α est l'unique solution de l'\u00e9quation $g(x) = 0$ dans $]0, +\infty[$.

4) a) **Initialisation** : Pour $n = 0$, $u_0 = 2$ donc $1 \leq u_0 \leq 2$ vrai.

H\u00e9r\u00e9dit\u00e9 : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $1 \leq u_n \leq 2$ et montrons que $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.

f est décroissante sur $[1, 2]$ et $1 \leq u_n \leq 2 \Rightarrow f(2) = 2 - \frac{2}{\sqrt{5}} \leq f(u_n) \leq f(1) = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

Or $2 - \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 1.1 \geq 1$ et $2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \leq 2$ donc $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.

b) f est dérivable sur $[1, 2]$ et $\forall x \in [1, 2], |f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

En plus $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1, 2]$ et aussi $\alpha \in [1, 2]$ donc d'après l'inégalité des

accroissements finis $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$ ou encore $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$.

c) Montrons, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |2 - \alpha|$.

Initialisation : Pour $n = 0, |u_0 - \alpha| = |2 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^0 |2 - \alpha| = |2 - \alpha|$. inégalité vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |2 - \alpha|$ et montrons que

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{n+1} |2 - \alpha|$$

On a $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |2 - \alpha|$ donc $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{n+1} |2 - \alpha|$.

d) $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |2 - \alpha|$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |2 - \alpha| = 0$ car $\frac{1}{2\sqrt{2}} \in]-1, 1[$

Donc (u_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \alpha) + \alpha = \alpha$.

Exercice 3

1) $P(2i) = (2i)^3 - 2(2\cos\theta + i)(2i)^2 + 4(1 + 2i\cos\theta)(2i) - 8i$
 $= 8i^3 + 8(2\cos\theta + i) + 8i(1 + 2i\cos\theta) - 8i = \cancel{8i} + \cancel{16\cos\theta} + \cancel{8i} + \cancel{8i} - \cancel{16\cos\theta} - \cancel{8i} = 0$
 donc z_0 est une solution de l'équation $P(z) = 0$.

2) a) $\forall z \in \mathbb{C}, (z - 2i)(z^2 - 4\cos\theta.z + 4) = z^3 - 4\cos\theta.z^2 + 4z - 2iz^2 + 8i\cos\theta.z - 8i$
 $= z^3 - (4\cos\theta + 2i)z^2 + (4 + 8i\cos\theta)z - 8i$
 $= z^3 - 2(2\cos\theta + i) + 4(1 + 2i\cos\theta)z - 8i = P(z)$

b) $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - 2i)(z^2 - 4\cos\theta.z + 4) = 0 \Leftrightarrow z = 2i = z_0$ ou $z^2 - 4\cos\theta.z + 4 = 0$ (1)

Résolution de l'équation (1) : $\Delta = 16\cos^2\theta - 16 = 16(\cos^2\theta - 1) = -16\sin^2\theta = (4i\sin\theta)^2$

Donc les solutions sont : $z' = \frac{4\cos\theta - 4i\sin\theta}{2} = 2\cos\theta - 2i\sin\theta = z_2$

et $z'' = \frac{4\cos\theta + 4i\sin\theta}{2} = 2\cos\theta + 2i\sin\theta = z_1$

c) $z_1 = 2(\cos\theta + i\sin\theta) = 2e^{i\theta}$ et $z_2 = 2(\cos\theta - i\sin\theta) = 2e^{-i\theta}$.

3) a) $OA = |2i| = 2$, $OM_1 = |2e^{i\theta}| = 2|e^{i\theta}| = 2$ et $OM_2 = |2e^{-i\theta}| = 2|e^{-i\theta}| = 2$

$OA = OM_1 = OM_2 = 2 \Rightarrow O, M_1$ et M_2 appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2 .

b) OAM_1M_2 est un parallélogramme $\Leftrightarrow \text{Aff}(\overrightarrow{OA}) = \text{Aff}(\overrightarrow{M_2M_1}) \Leftrightarrow$

$$\text{Aff}(\overrightarrow{OA}) = \text{Aff}(\overrightarrow{M_2M_1}) \Leftrightarrow 2i = 2(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \Leftrightarrow i = 2i\sin\theta \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{1}{2}$$

et puisque $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ alors $\sin\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} = \theta_0$.

En plus $OA = OM_2$ donc OAM_1M_2 est un losange.

c) $z_0^6 = (2i)^6 = 2^6 \times i^6 = 64 \times (i^2)^3 = 64(-1)^3 = -64$

$$z_1^6 = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^6 = 2^6 e^{i\pi} = -64 \quad \text{et} \quad z_2^6 = \left(2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^6 = 2^6 e^{-i\pi} = -64$$

Donc z_0, z_1 et z_2 sont des racines sixièmes de -64 .

d) $I = O * M_1 \Leftrightarrow z_I = \frac{z_1}{2} = e^{i\theta}$ et $J = A * M_2 \Leftrightarrow z_J = \frac{2i + 2e^{-i\theta}}{2} = i + e^{-i\theta}$

$$\text{Aff}(\overrightarrow{IJ}) = z_J - z_I = i + e^{-i\theta} - e^{i\theta} = i - (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = i - 2i\sin\theta = i(1 - 2\sin\theta)$$

Donc $\overrightarrow{IJ} = (1 - 2\sin\theta)\vec{j}$ c-à-d $(IJ) \parallel (O, \vec{j})$ pour tout réel $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{6}\right\}$

تم بعون الله

آرائكم وانتقاداتكم مرحب بها

