

Durée de
l'épreuve :
3H

Devoir de synthèse n°1
Classe : 4M2

Prof:
Dhaouadi
Nejib

Exercice n°1

Répondre par vrai ou faux (aucune justification n'est demandée)

- 1) Si une suite (u_n) est divergente alors l'une au moins des suites (u_{2n}) ou (u_{2n+1}) est divergente.
- 2) Si $z = \sqrt{3} + i$ alors $z^{2010} \in \mathbb{R}$
- 3) Un antidéplacement qui admet au moins un point fixe est une symétrie orthogonale.
- 4) Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ ($a < b$) et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$ alors sa courbe représentative admet au moins une tangente horizontale

Exercice n°2

Soit θ un réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

On pose $f(z) = z^3 - (2 \cos \theta + i)z^2 + (1 + 2i \cos \theta)z - i$

- 1) a) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire z_0 que l'on déterminera.
- b) Déduire alors les deux autres solutions de l'équation $f(z) = 0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $i, e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

- a) Déterminer le réel θ_0 pour lequel le quadrilatère $OABC$ est un parallélogramme.
- b) Vérifier que le parallélogramme ainsi obtenu est un losange.
- c) Déterminer et caractériser, dans ce cas, toutes les isométries qui transforment C en B et B en A .

Exercice n°3

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct

Soit D le point de P tel que le triangle CDA soit rectangle et isocèle et

$$\left(\widehat{CA, CD}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

- 1) Faites une figure que l'on complétera au fur et à mesure.

- 2) Soit R_A la rotation de centre A transformant B en C et R_C la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On pose $f = R_C \circ R_A$
- Déterminer $f(A)$ et $f(B)$.
 - Démontrer que f est une rotation dont on précisera l'angle et le centre noté O .
Placer O sur la figure.
 - Quelle est la nature du quadrilatère $ABOC$.
- 3) On pose $g = f \circ S_{(BC)}$.
- Déterminer $g(A)$ et $g(B)$.
 - Montrer que g ne peut pas être une symétrie orthogonale et déduire alors sa nature.
- 4) On note H le milieu de $[BC]$ et $H' = g(H)$.
- Montrer que H' est le milieu de $[OD]$.
 - Donner la forme réduite de g .

Exercice n°4

Soit f la fonction définie sur $D =]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- Etudier la dérivabilité de f à gauche en -2 et à droite en 0 .
Interpréter les résultats trouvés.
- Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $D \setminus \{-2, 0\}$ et vérifier que $f'(x) < 0$ pour $x < -2$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 0$
 - Dresser le tableau de variations de f .
- Montrer que la droite Δ d'équation $y = -2x - 1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$
- Tracer Δ et (C) .
- Soit (C') la symétrique de (C) par rapport au point $I(-1, 0)$.
 - Montrer que pour tous points $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ on a :

$$M' = S_I(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2 - x \\ y' = -y \end{cases}$$
 - Soit g la fonction qui admet pour représentation graphique la courbe (C') .
Montrer que g est définie sur D par $g(x) = -x - 2 - \sqrt{x^2 + 2x}$.

Solutions

Solution de l'exercice 1

1) **Faux**

Prenons $u_n = (-1)^n$. On a : $u_{2n} = (-1)^{2n} = 1$, elle converge vers 1 et $u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$, elle converge vers -1 alors que la suite (u_n) est divergente.

2) **Vrai** : $\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \Rightarrow (\sqrt{3} + i)^{2010} = 2^{2010} e^{i\frac{2010\pi}{6}} = 2^{2010} e^{i(335\pi)} = -2^{2010}$

3) **Vrai** 4) **Vrai**. (Résultats de cours)

Solution de l'exercice 2

1) a) Soit y un réel

$$\begin{aligned} f(iy) = 0 &\Leftrightarrow (iy)^3 - (2\cos\theta + i)(iy)^2 + (1 + 2i\cos\theta)(iy) - i = 0 \\ &\Leftrightarrow -iy^3 + (2\cos\theta + i)y^2 + (i - 2\cos\theta)y - i = 0 \\ &\Leftrightarrow (2\cos\theta y^2 - 2\cos\theta y) + i(-y^3 + y^2 + y - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2y\cos\theta(y - 1) = 0 \\ -y^3 + y^2 + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 1 \end{aligned}$$

Donc i est la solution imaginaire de l'équation.

b) Puisque i est une solution de l'équation $f(z) = 0$ alors $f(z)$ est factorisable par $z - i$.

Donc $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = (z - i)(az^2 + bz + c)$ où a , b et c sont des nombres complexes.

Après développement et identification des coefficients on trouve:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - ia = -2\cos\theta - i \\ c - ib = 1 + 2i\cos\theta \\ -ic = -i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 1 \\ b = -2\cos\theta \\ c - ib = 1 + 2i\cos\theta \end{cases} \text{ vrai}$$

Donc $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = (z - i)(z^2 - 2\cos\theta \cdot z + 1)$

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow z = i \text{ ou } z^2 - 2\cos\theta \cdot z + 1 = 0$$

$$\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = -4\sin^2\theta = (2i\sin\theta)^2$$

Donc les deux autres solutions sont: $z' = \frac{2\cos\theta - 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$

et $z'' = \frac{2\cos\theta + 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

----- © Sigmaths © Sigmaths © Sigmaths © Sigmaths -----

$$2) \frac{\text{Aff}(\overrightarrow{OB})}{\text{Aff}(\overrightarrow{OC})} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta} = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta) \notin \mathbb{R} \quad (\text{car } 2\theta \in]0, \pi[\Rightarrow \sin(2\theta) \neq 0)$$

D'où les points O, A et B ne sont pas alignés pour tout réel $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Alors $OABC$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow O * B = A * C$

$$O * B = A * C \Leftrightarrow \frac{e^{i\theta}}{2} = \frac{i + e^{-i\theta}}{2} \Leftrightarrow e^{i\theta} - e^{-i\theta} = i \Leftrightarrow 2i \sin \theta = i \Leftrightarrow \sin \theta = \frac{1}{2}$$

Ce qui donne $\theta = \frac{\pi}{6}$ (car $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$)

c) $OA = |i| = 1$ et $OC = |e^{-i\theta}| = 1 \Rightarrow OA = OC$ et en plus $OABC$ est un parallélogramme donc $OABC$ est un losange.

d) $OABC$ est un losange donc $BC = AB \neq 0$ et par suite il existe un seul déplacement f et un seul antidéplacement g tq $f(C) = g(C) = B$ et $f(B) = g(B) = A$.

Détermination du déplacement f

On a : $\overrightarrow{CB} \neq \overrightarrow{BA}$ ce qui prouve que f n'est pas une translation et par suite c'est une rotation. (les seuls déplacements sont les translations ou les rotations)

Le centre de la rotation f est l'intersection des médiatrices des segments $[AB]$ et $[BC]$.

Et puisque $f(B) = A$ alors son angle θ est donné par:

$$\theta \equiv \left(\widehat{OB, OA}\right) \equiv \arg\left(\frac{i}{e^{i\frac{\pi}{6}}}\right) \equiv \arg\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}\right) \equiv \arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$

Détermination de l'antidéplacement g

Un antidéplacement est une symétrie orthogonale ou une symétrie glissante.

Supposons que g est une symétrie orthogonale d'axe D

Puisque $g(B) = A$ et $g(C) = B$ alors la droite D est à la fois médiatrice de $[AB]$ et médiatrice de $[BC]$ donc $(AB) \parallel (BC)$ ce qui est impossible.

Donc g est une symétrie glissante. On note Δ son axe et \vec{u} son vecteur.

$$\begin{cases} g(B) = A \\ g(C) = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = A * B \in \Delta \\ J = B * C \in \Delta \end{cases} \Rightarrow \Delta = (IJ)$$

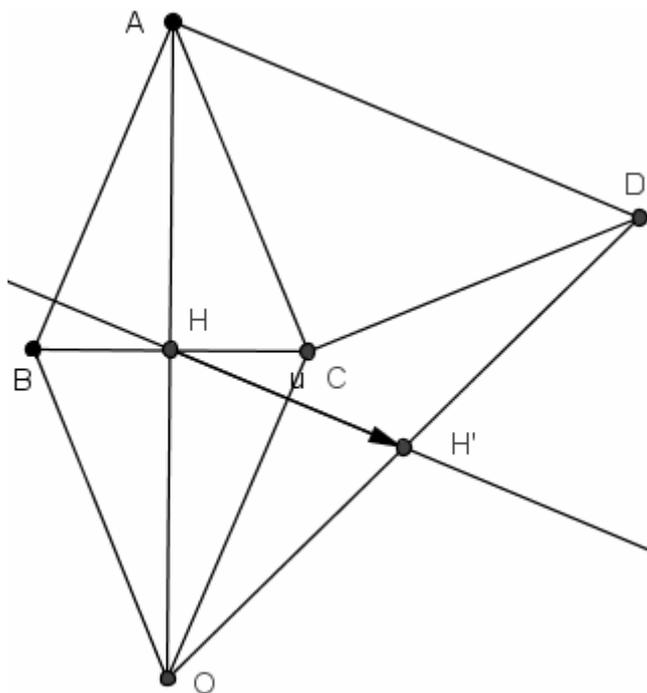
$$g = S_{\Delta} o t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} o S_{\Delta} \Rightarrow g o g = t_{\vec{u}} o S_{\Delta} o S_{\Delta} o t_{\vec{u}} = t_{2\vec{u}} \quad \text{Or } g o g(C) = g(g(C)) = g(B) = A$$

Sigmaths ©
Sigmaths ©
Sigmaths ©
Sigmaths ©

Donc $t_{2\vec{u}}(C) = A$ ce qui donne $2\vec{u} = \overrightarrow{CA}$ ou encore $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{JI}$

Solution de l'exercice 3

1)



2) a) $f(A) = R_C(R_A(A)) = R_C(A) = D$ car $CA = CD$ et $(\widehat{CA, CD}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

$$f(B) = R_C(R_A(B)) = R_C(C) = C.$$

b) $R_A(B) = C$ et $(\widehat{AB, AC}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$ donc R_A est une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$.

f est la composée de deux rotations dont la somme des angles

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} \neq 2k\pi, \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z} \text{ donc } f \text{ est une rotation d'angle } -\frac{\pi}{4}.$$

$f(A) = D$ et $f(B) = C$ donc son centre O est l'intersection des médiatrices des segments $[AD]$ et $[BC]$.

c) $AB = AC$ et $OB = OC$ donc (OA) est la médiatrice de $[BC]$.

$$\widehat{BAO} = \widehat{AOC} = \frac{\pi}{8} \text{ (alternes internes)} \Rightarrow (AB) \parallel (OC)$$

$$\widehat{BOA} = \widehat{OAC} = \frac{\pi}{8} \text{ (alternes internes)} \Rightarrow (OB) \parallel (AC)$$

D'où $OBAC$ est un parallélogramme, et puisque $AB = AC$ donc c'est un losange.

3) a) $g(A) = f(S_{(BC)}(A)) = f(O) = O$ ($OBAC$ est un losange donc $S_{(BC)}(A) = O$).

.....
 Sigmaths ©
 Sigmaths ©
 Sigmaths ©
 Sigmaths ©
 Sigmaths ©

$$g(B) = f(S_{(BC)}(B)) = f(B) = C.$$

b) Si g est une symétrie orthogonale alors son axe est à la fois médiatrice de $[OA]$ qui est (BC) et médiatrice de $[BC]$ qui est (OA) ce qui est impossible.

g est la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement donc c'est un antidéplacement. En plus g ne peut pas être une symétrie orthogonale, donc c'est une symétrie glissante. On note Δ son axe et \vec{u} son vecteur.

4) a) $H = B * C = A * O$ car $OBAC$ est un losange.

g est une isométrie donc elle conserve le milieu d'un segment.

Ce qui permet de dire que $g(H) = g(A) * g(O)$ avec $g(A) = O$

et $g(O) = f(S_{(BC)}(O)) = f(A) = D$ d'où $H' = O * D$.

$$b) g = S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$$

$$\begin{cases} g(A) = O \Rightarrow A * O = H \in \Delta \\ g(O) = D \Rightarrow O * D = H' \in \Delta \end{cases} \Rightarrow \Delta = (HH')$$

$$H \in \Delta \Rightarrow g(H) = t_{\vec{u}}(H) = H' \Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{HH'}$$

Solution de l'exercice 4

1)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} &= \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{\sqrt{x^2 + 2x} - x - 2}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x + 2} - 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{x^2 + 2x}{(x + 2)\sqrt{x^2 + 2x}} - 1 = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x}} - 1 = -\infty \end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en -2 .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + 2x} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} - 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 2x}{x\sqrt{x^2 + 2x}} - 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 2x}} - 1 = +\infty \end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en -2 .

Interprétation graphique :

La courbe (C) admet deux demi tangentes verticales aux points d'abscisses -2 et 0 .

$$2) a) \text{ Pour tout réel } x \text{ de } D \setminus \{-2, 0\}, f'(x) = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x}} - 1 = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}} - 1$$

- Pour $x < -2$, $x + 1 < -1 < 0$ donc $f'(x) < 0$.

• Pour $x > 0$ on a :

$$f'(x) = \frac{(x+1) - \sqrt{x^2+2x}}{\sqrt{x^2+2x}} = \frac{(x+1)^2 - (x^2+2x)}{\sqrt{x^2+2x}(x+1+\sqrt{x^2+2x})} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}(x+1+\sqrt{x^2+2x})} > 0$$

b)

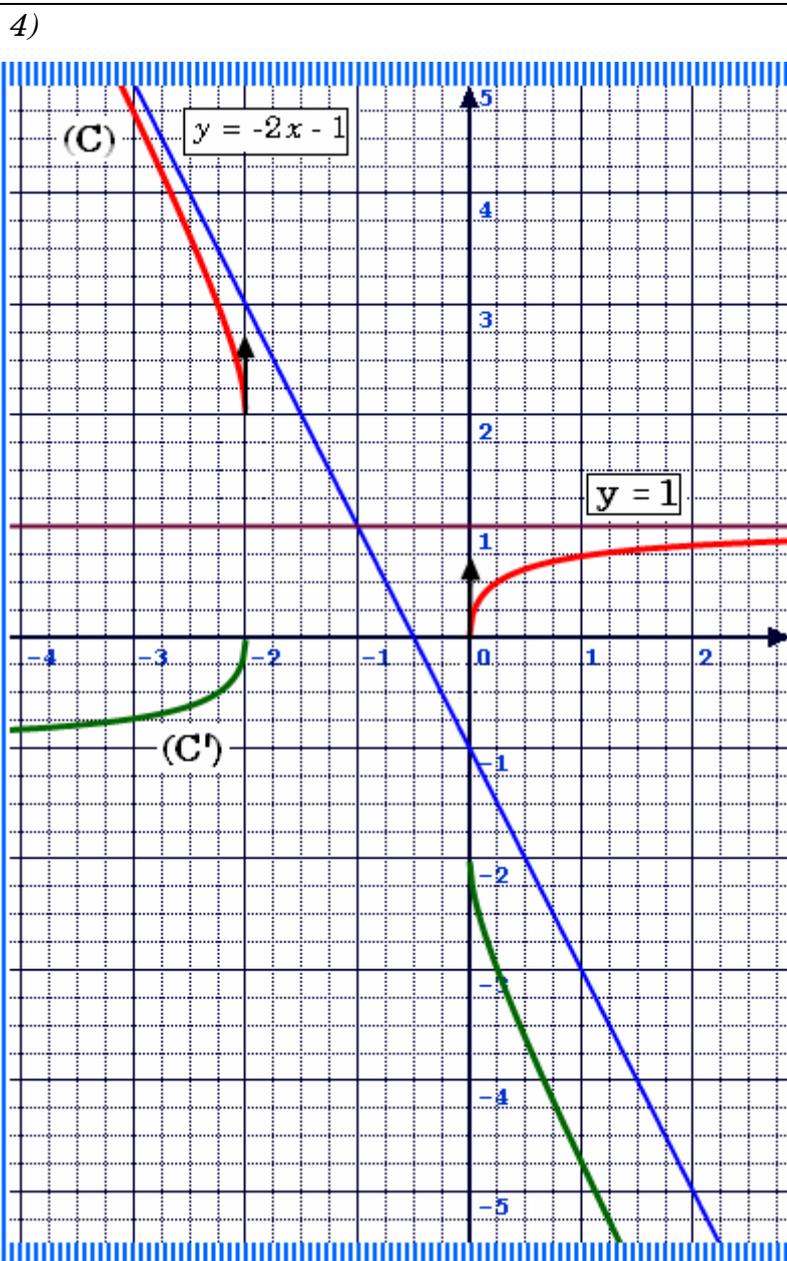
x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	
$f(x)$	$+\infty$	2	0	1

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+2x} - x = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+2x} - x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-2x-1) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + 2x + 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+2x} + (x+1) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+2x-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x}-(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2+2x}-(x+1)} = 0 \end{aligned}$$

Donc $\Delta : y = -2x - 1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.



$$5) a) M' = S_I(M) \Leftrightarrow I = M * M' \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = \frac{x + x'}{2} \\ 0 = \frac{y + y'}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2 - x \\ y' = -y \end{cases}$$

b) On a : $S_I((C)) = (C')$

Soient $M'(x', y')$ et $M(x, y)$ tels que $S_I(M) = M'$

$M' \in (C') \Leftrightarrow M \in (C) \Leftrightarrow x \in D$ et $y = f(x) \Leftrightarrow -2 - x' \in D$ et $-y' = f(-2 - x')$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 - x' \leq -2 \\ -2 - x' \geq 0 \end{cases} \text{ et } -y' = \sqrt{(-2 - x')^2 + 2(-2 - x')} - (-2 - x')$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' \geq 0 \\ -2 \geq x' \end{cases} \text{ et } y' = -\sqrt{x'^2 + 4x' + 4} - 4 - 2x' - 2 - x'$$

$$\Leftrightarrow x' \in D \text{ et } y' = -2 - x' - \sqrt{x'^2 + 2x'}$$

Conclusion : $M(x, y) \in (C') \Leftrightarrow x \in D$ et $y = -2 - x - \sqrt{x^2 + 2x}$

