

**Exercice n°1**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  et la suite  $u$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $u_n = \frac{\alpha^2 + (n-1)}{\alpha}$

1) Montrer que  $u$  est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

2) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ .

Calculer  $S_n$  en fonction de  $\alpha$  et  $n$ .

3) Soit la suite  $v$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $v_n = \frac{S_n}{n^2}$

Montrer que la suite  $v$  est convergente et déterminer sa limite.

**Exercice n°2**

Soient les suites  $u$  et  $v$  définies sur  $\mathbb{N}^*$  par :

$$u_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

$$v_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

Montrer que les suites  $u$  et  $v$  sont convergentes et déterminer la limite de la suite  $u$  (On pourra remarquer que  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ )

**Exercice n°3**

Soit  $u$  la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$ .

Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$ .

En déduire que la suite  $u$  est convergente et déterminer sa limite.

**Exercice n°4**

Soit la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par : 
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n \quad (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$$

1°) Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose  $v_n = \frac{1}{n} u_n$

a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique

-----  
Sigmaths ©  
Sigmaths ©  
Sigmaths ©  
Sigmaths ©  
Sigmaths ©  
-----

b) Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$  et déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $u_n = \frac{n}{2^n}$

2°) a) En remarquant que pour  $n \in \mathbb{N}^*$  ,  $(n+1)^2 = n^2 \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$  ; montrer à l'aide

d'un raisonnement par récurrence que pour tout entier  $n \geq 4$  on a  $n^2 \leq 2^n$

b) Déduire alors que la suite  $(u_n)$  est convergente et préciser sa limite.

### Exercice n°5

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$  et les deux suites  $u$  et  $v$  définies par :

$$u_1 = a ; v_1 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* ; u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

1) Considérons la suite  $w$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $w_n = u_n - v_n$ .

Montrer que  $(w_n)$  est une suite géométrique et exprimer  $w_n$  en fonction de  $a, b$  et  $n$ .

2) Montrer que les suites  $u$  et  $v$  sont adjacentes.

3) Calculer, pour tout entier naturel non nul,  $\frac{1}{2}u_n + v_n$ . Conclure.

### Exercice n°6

On considère les deux suites  $u$  et  $v$  définies par :

$$u_0 = 1 ; v_0 = -3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* ; u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

1) Trouver deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que les suites  $S$  et  $T$  définies pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par:

$$S_n = u_n + \alpha v_n \text{ et } T_n = u_n + \beta v_n \text{ soient géométriques.}$$

2) Exprimer  $S_n$  et  $T_n$  en fonction de  $n$  et déduire  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$ .

3) Déduire alors que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont convergentes et donner leurs limites.

### Exercice n°7

Soit la suite  $(x_n)$  définie par :  $x_0 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$

1) a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ;  $0 \leq x_n \leq 2$

b) En déduire que  $(x_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

2) On pose  $y_n = 2 - x_n$ .

a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ;  $y_{n+1} \leq \frac{y_n}{2}$ .

-----  
Sigmaths ©  
Sigmaths ©  
Sigmaths ©  
Sigmaths ©  
Sigmaths ©  
-----

b) Retrouver alors le résultat de 1) b)

3) On pose  $x_n = 2 \cos(z_n)$  avec  $z_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

a) Montrer que  $(z_n)$  est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) Exprimer  $z_n$  et puis  $x_n$  en fonction de  $n$ .

Retrouver alors le résultat de 1) b)

**Exercice n°8**

Soit  $(u_n)$  la suite réelle à termes non nuls définie par :

$u_0 = 1$  ;  $u_1 = \frac{1}{2}$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1}^2 = 2u_{n+2}u_n$

1°) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison

2°) En déduire que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u_n$

3°) Montrer alors que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

4°) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite



-----  
 Sigmaths ©  
 Sigmaths ©  
 Sigmaths ©  
 Sigmaths ©  
 Sigmaths ©  
 -----

## Correction

## Exercice n°1

1)  $u_{n+1} - u_n = \frac{\alpha^2 + n}{\alpha} - \frac{\alpha^2 + (n-1)}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$  donc  $u$  est une suite arithmétique de raison  $\frac{1}{\alpha}$  et de premier terme  $u_1 = \alpha$ .

$$2) S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) \text{ (somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique)}$$

$$= \frac{n}{2} \left( \alpha + \frac{\alpha^2 + (n-1)}{\alpha} \right) = \frac{n}{2\alpha} (\alpha^2 + \alpha^2 + n - 1) = \frac{n}{2\alpha} (2\alpha^2 + n - 1).$$

$$3) \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{S_n}{n^2} = \frac{1}{2n\alpha} (2\alpha^2 + n - 1) = \frac{2\alpha^2 - 1}{2\alpha n} + \frac{1}{2\alpha}.$$

La suite  $n \mapsto \frac{2\alpha^2 - 1}{2n\alpha}$  est convergente et elle converge vers 0

Donc la suite  $v$  est convergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2\alpha}$ .

## Exercice n°2

Etude de la suite  $(u_n)$ 

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$$

$$\text{Car } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$$

$$\text{Donc } u_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \left( \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

KKK 'G? A5H<G'H?

Si vous détestez le symbole  $\sum$  alors vous pouvez le faire autrement:

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$* \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \text{ donc } \lim u_n = 1.$$

Etude de la suite  $(v_n)$

Pour tout entier  $k \geq 2$ , on a :  $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$ .

Donc  $1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{1}{2 \times 1} + \dots + \frac{1}{n(n-1)}$  ou encore  $v_n \leq 1 + u_{n-1}$

D'où pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $v_n \leq 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} \leq 2$  (ce qui est vrai pour  $n=1$  aussi)

Pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$  donc la suite  $(v_n)$  est croissante.

Conclusion: La suite  $(v_n)$  est croissante et majorée ( par 2) donc elle est convergente.

### Exercice n°3

On a :  $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}; \sqrt{n^2 + 1} \leq \sqrt{n^2 + k} \leq \sqrt{n^2 + n}$ .

Donc  $\frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$ .

En faisant la somme membre à membre de ces  $n$  encadrements on obtient :

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} = \frac{n}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \quad \text{et} \quad \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = \frac{n}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = 1.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = 1 \end{array} \right.$$

**KKK 'G; A5H<G'H?**

Donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite  $(u_n)$  est convergente

et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

### Exercice n°4

1) a)  $v_{n+1} = \frac{1}{n+1} u_{n+1} = \frac{1}{n+1} \frac{n+1}{2n} u_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} u_n = \frac{1}{2} v_n$  donc  $(v_n)$  est une suite

géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ .

b)  $v_n = v_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ , pour tout entier naturel  $n$  non nul

Donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = n v_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n}{2^n}$ .

**KKK 'G' A5H<G'H?**

2) a) On note  $P(n)$  la propriété «  $n^2 \leq 2^n$  »

$P(4)$  est vraie car  $4^2 = 16 \leq 2^4 = 16$ .

**Hérédité** : Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 4$ . Supposons que  $P(n)$  est vraie et montrons que  $P(n+1)$  est aussi vraie.

On a  $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = n^2 \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$  et puisque  $n \geq 4$  alors  $\frac{2}{n} \leq \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$  et

$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{16}$  d'où  $\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{16} < 1$  et alors  $n^2 \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \leq 2^n \cdot 2 \Rightarrow (n+1)^2 \leq 2^{n+1}$ .

b) Pour tout entier naturel  $n$  supérieur à 4 on a :  $n^2 \leq 2^n$  donc  $0 < \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$

$$\begin{cases} 0 < u_n \leq \frac{1}{n} & \text{pour } n \geq 4 \\ \lim \frac{1}{n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{la suite } (u_n) \text{ est convergente et } \lim u_n = 0$$

**Exercice n°5**

1)  $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n - v_n) = \frac{1}{4}w_n \Rightarrow (w_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{4}$  et

de premier terme  $w_1 = u_1 - v_1 = a - b$ .

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ;  $w_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} (a - b)$ .

2) Remarquons que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ;  $w_n = u_n - v_n < 0$  car  $a < b$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} = -\frac{w_n}{2} > 0$

Donc la suite  $(u_n)$  est croissante.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n - v_n}{4} = \frac{w_n}{4} < 0$

Donc la suite  $(v_n)$  est décroissante.

Conclusion:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq v_n \\ (u_n) \text{ croissante et } (v_n) \text{ décroissante} \Rightarrow \text{Les suites } u \text{ et } v \text{ sont adjacentes} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0 \end{array} \right.$$

3)  $\frac{1}{2}u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{4} + \frac{u_n + 3v_n}{4} = \frac{2u_n + 4v_n}{4} = \frac{1}{2}u_n + v_n$ . Donc la suite

$n \mapsto \frac{1}{2}u_n + v_n$  est constante et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ;  $\frac{1}{2}u_n + v_n = \frac{1}{2}u_1 + v_1 = \frac{1}{2}a + b$ .

En plus les suites  $u$  et  $v$  sont adjacentes donc elles convergent vers une même limite  $l$ .

Par passage à la limite dans l'égalité  $\frac{1}{2}u_n + v_n = \frac{1}{2}a + b$ , on obtient  $\frac{3}{2}l = \frac{1}{2}a + b$  ce qui

donne  $l = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{2}a + b \right) = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$  cqfd.

**Exercice n°6**

1) Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $u_{n+1} + xv_{n+1} = \frac{4 + 3x}{12}(u_n + xv_n) + \frac{8 + 5x - 3x^2}{12}$

Pour que la suite  $(u + xv)_n$  soit géométrique, il suffit de poser  $\frac{8 + 5x - 3x^2}{12} = 0$

Ce qui est équivalent à  $x = -1$  ou  $x = \frac{8}{3}$ .

**KKK 'G? A5H<G'H?**

Ainsi, on obtient deux suites géométriques :

$S : n \mapsto u_n - v_n$  est une suite géométrique de raison  $\frac{4 - 3}{12} = \frac{1}{12}$

et de premier terme  $S_0 = u_0 - v_0 = 4$ .

$T : n \mapsto u_n + \frac{8}{3}v_n$  est une suite géométrique de raison  $\frac{4 + 3 \times \frac{8}{3}}{12} = \frac{12}{12} = 1$

et de premier terme  $T_0 = -7$  (suite constante)

b) Pour tout entier naturel  $n$ ,  $S_n = 4 \left( \frac{1}{12} \right)^n$  et  $T_n = -7$ .

D'où le système suivant:

$$\begin{cases} u_n - v_n = 4 \left(\frac{1}{12}\right)^n \\ u_n + \frac{8}{3} v_n = -7 \end{cases}$$

Ce système admet pour solution le couple  $(u_n, v_n)$  tel que :

$$u_n = -\frac{3}{11} \left( 7 - \frac{32}{3} \left(\frac{1}{12}\right)^n \right) \quad \text{et} \quad v_n = -\frac{3}{11} \left( 7 + 4 \left(\frac{1}{12}\right)^n \right).$$

3)  $\frac{1}{12} \in ]-1, 1[$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{12}\right)^n = 0$

Ce qui permet de dire que les suites  $u$  et  $v$  sont convergentes et on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\frac{21}{11}$$

**Exercice n°7**

1) a) Montrons ce résultat par récurrence.

Pour  $n = 0$ ;  $x_0 = 0 \in [0, 2]$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ; supposons que  $0 \leq x_n \leq 2$  et montrons que  $0 \leq x_{n+1} \leq 2$ .

$$0 \leq x_n \leq 2 \Leftrightarrow 2 \leq x_n + 2 \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{x_n + 2} \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x_{n+1} \leq 2. \quad \text{Cqfd.}$$

b) Pour tout entier naturel  $n$ ; on a:

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n + 2} - x_n = \frac{x_n + 2 - x_n^2}{\sqrt{x_n + 2} + x_n} = \frac{(2 - x_n)(1 + x_n)}{\sqrt{x_n + 2} + x_n} \geq 0$$

Donc la suite  $(x_n)$  est croissante.

La suite  $(x_n)$  est croissante et majorée (par 2) donc elle est convergente.

Posons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$

**KKK 'G' A5H<G'H?**

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \text{ avec } f : x \mapsto \sqrt{x + 2} \\ \forall n \in \mathbb{N}; x_n \in [0, 2] \\ f \text{ continue sur } [0, 2] \\ (x_n) \text{ converge vers } l \in [0, 2] \end{cases} \Rightarrow f(l) = l$$

$$f(l) = l \Leftrightarrow \sqrt{l + 2} = l \Leftrightarrow \begin{cases} l^2 - l - 2 = 0 \\ l \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (l - 2)(l + 1) = 0 \\ l \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow l = 2$$

D'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 2$

$$2) a) y_{n+1} = 2 - x_{n+1} = 2 - \sqrt{x_n + 2} = \frac{4 - x_n - 2}{2 + \sqrt{x_n + 2}} = \frac{2 - x_n}{2 + \sqrt{x_n + 2}} \leq \frac{2 - x_n}{2}$$

(Car  $2 - x_n \geq 0$  et  $2 + \sqrt{x_n + 2} \geq 2$ )

Donc pour tout entier naturel  $n$ ;  $y_{n+1} \leq \frac{1}{2} y_n$ .

b) Montrons à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}; y_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(Résultat que l'on peut obtenir en faisant le produit membre à membre...)

Pour  $n = 0$ ;  $y_0 = 2 - x_0 = 2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$  ce qui est vrai.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ; supposons que  $y_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$  et montrons que  $y_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$y_{n+1} \leq \frac{1}{2} y_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ donc } y_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

D'après ce qui précède ; pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq y_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Et puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$  (car  $\frac{1}{2} \in ]-1, 1[$ ) alors la suite  $(y_n)$  converge vers 0.

Et de l'égalité  $x_n = 2 - y_n$  on peut déduire que la suite  $(x_n)$  converge vers 2.

$$3) a) x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2} = \sqrt{2 \cos(z_n) + 2} = \sqrt{2(\cos(z_n) + 1)} = \sqrt{2 \times 2 \cos^2\left(\frac{z_n}{2}\right)}$$

$$= 2 \left| \cos\left(\frac{z_n}{2}\right) \right| = 2 \cos\left(\frac{z_n}{2}\right) \text{ car } \frac{z_n}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos\left(\frac{z_n}{2}\right) > 0$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ;  $x_{n+1} = 2 \cos(z_{n+1}) = 2 \cos\left(\frac{z_n}{2}\right)$  avec  $z_{n+1}$  et  $\frac{z_n}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Donc  $z_{n+1} = \frac{1}{2} z_n$  et par suite  $(z_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et de premier terme

$$z_0 = \frac{\pi}{2} \text{ car } x_0 = 0 = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

b)  $(z_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et de premier terme  $z_0 = \frac{\pi}{2}$ .

Donc pour tout entier naturel  $n$ ,  $z_n = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

$$D'où  $x_n = 2 \cos(z_n) = 2 \cos\left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$ .$$

**KKK 'G? A5HkG'H?**

La fonction cosinus est continue en 0 et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$  (car  $\frac{1}{2} \in ]-1, 1[$ )

Donc la suite  $(x_n)$  est convergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 2 \cos(0) = 2$ .

**Exercice n°8**

1°)  $v_{n+1} = \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1}^2}{2u_n} = \frac{1}{2} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} v_n$  donc la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$

2°) La suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$

donc  $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{u_1}{u_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$  d'où pour  $n \in \mathbb{N}$  on a :

$$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \Rightarrow u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u_n$$

3°) On peut procéder à l'aide d'un raisonnement par récurrence

\* Pour  $n=1$  l'égalité est vraie ( $u_0 = 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$ )

\* Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , supposons que  $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$  et montrons que  $u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$

$$1 + 2 + \dots + n + (n + 1) = \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) = (n + 1) \left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} \quad \text{cqfd}$$

Autrement

$$u_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 u_0$$

$$u_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 u_1$$

⋮

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n u_{n-1}$$



En faisant le produit des égalités précédentes, on obtient après simplification

(Simplification justifiée car la suite est à termes non nuls)

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+\dots+n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad \text{car } 1+2+\dots+n \text{ est la somme de } n \text{ termes consécutifs}$$

d'une suite arithmétique de raison 1

4°)  $\frac{n(n + 1)}{2} - n = \frac{n^2 - n}{2} \geq 0$  pour tout entier naturel  $n$ ,

donc  $\frac{n(n+1)}{2} \geq n$

D'où  $0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$  et comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$  (suite géométrique de raison

$\frac{1}{2} \in ]-1, 1[)$

alors  $(u_n)$  est convergente et elle converge vers 0

وَمَا لِيْزَمَ اَنَا عَيْبٌ سِوَاَنَا  
وَلَوْ نَطَقَ الزَّمَانُ لَنَا هَجَانَا

نَعِيْبُ زَمَانَنَا وَالْعَيْبُ فَيَنَا  
وَنَهْجُو ذَا الزَّمَانِ بِغَيْرِ ذَنْبٍ

