

EXERCICE 1

On donne le nombre complexe $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

- Exprimer z^2 sous forme algébrique
- Exprimer z^2 sous forme exponentielle.
- En déduire z sous forme exponentielle.

EXERCICE 2

- Montrer que $(1+i)^6 = -8i$.
- On considère l'équation (E) : $z^2 = -8i$.
 - Déduire de 1. une solution de l'équation (E).
 - L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous forme algébrique.
- Déduire également de 1. une solution de (E') : $z^3 = -8i$.

EXERCICE 3

Linéariser le polynôme $P = \cos^2 5x \sin 3x$.

K K K 'G' A 5 H G'H?

EXERCICE 4

a. On considère le nombre complexe $z = 1 - i\sqrt{3}$.

Mettre z sous forme trigonométrique. Calculer z^2 et z^3 . En déduire z^{1992} et z^{1994} .

b. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^3 + 8 = 0$ (on remarquera que cette équation a une racine évidente réelle). En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $(iz - 1)^3 + 8 = 0$. Donner les solutions sous forme algébrique.

EXERCICE 5

1. z_1 et z_2 sont des nombres complexes ; résoudre le système d'équations suivant
$$\begin{cases} z_1\sqrt{3} - z_2 = -2 \\ z_1 - z_2\sqrt{3} = -2i \end{cases}$$

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct de centre O , d'unité graphique 4 cm, on considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = -\sqrt{3} + i$ et $z_B = -1 + i\sqrt{3}$. Donner les écritures de z_A et z_B sous forme exponentielle. Placer les points A et B .

3. Calculer module et argument de $\frac{z_A}{z_B}$.

En déduire la nature du triangle ABO et une mesure de l'angle $(\overline{OA}, \overline{OB})$.

4. Déterminer l'affixe du point C tel que $ACBO$ soit un losange. Placer C . Calculer l'aire du triangle ABC en cm^2 .

EXERCICE 6**Partie A**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. Pour réaliser la figure, on prendra pour unité graphique 1 cm.

Soit P le point d'affixe p où $p = 10$ et Γ le cercle de diamètre $[OP]$. On désigne par Ω le centre de Γ .

Soit A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c où $a = 5 + 5i$, $b = 1 + 3i$ et $c = 8 - 4i$.

1. Montrer que A, B et C sont des points du cercle Γ .
2. Soit D le point d'affixe $2 + 2i$. Montrer que D est le projeté orthogonal de O sur la droite (BC) .

Partie B (On rappelle que $|z|^2 = z\bar{z}$).

A tout point M du plan différent de O , d'affixe z , on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{20}{\bar{z}}$

où \bar{z} représente le nombre conjugué de z .

1. Montrer que les points O, M et M' sont alignés.
2. Soit Δ la droite d'équation $x = 2$ et M un point de Δ d'affixe z . On se propose de définir géométriquement le point M' associé au point M .
 - a. Vérifiez que $z + \bar{z} = 4$.
 - b. Exprimez $z' + \bar{z}'$ en fonction de z et \bar{z} et en déduire que $5(z' + \bar{z}') = z' \bar{z}'$.
 - c. En déduire que M' appartient à l'intersection de la droite (OM) et du cercle Γ . Placer M' sur la figure.

EXERCICE 7

On considère dans \mathbb{C} l'équation du second degré $Z^2 + Z + 1 = 0$

1. Résoudre cette équation. On note les solutions z_1 et z_2 , la partie imaginaire de z_1 étant positive.
2. Vérifier que $z_2 = z_1^2$.
3. Mettre z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
4. Indiquer sur quel cercle de centre O sont situés les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 . Placer alors ces points avec précision dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 4 cm.

EXERCICE 8

On désigne par P le plan complexe. Unité graphique : 2 cm.

1. Résoudre l'équation d'inconnue complexe $z : z^2 - 2z + 4 = 0$. On notera z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et z_2 l'autre.

Donner le module et l'argument de chacun des nombres z_1, z_2, z_1^2, z_2^2 . Ecrire sous forme algébrique z_1^2 et z_2^2 .

2. On considère dans le plan les points $A(1 + i\sqrt{3}), B(1 - i\sqrt{3}), C(-2 + 2i\sqrt{3})$ et $D(-2 - 2i\sqrt{3})$.

a. Représenter les points A, B, C et D dans le plan P . Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

- b. Montrer que les points O, A et D d'une part et les points O, B et C d'autre part sont alignés. Quel est le point d'intersection des diagonales de $ABCD$?
- c. Quelles sont les affixes des vecteurs \overline{AB} et \overline{AC} ? Montrer que les droites AB et AC sont perpendiculaires.

EXERCICE 9

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0$.
- On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes $a = 4\sqrt{3} - 4i$ et $b = 4\sqrt{3} + 4i$.
 - Ecrire a et b sous forme exponentielle.
 - Calculer les distances OA, OB, AB . En déduire la nature du triangle OAB .
- On désigne par C le point d'affixe $c = -\sqrt{3} + i$ et par D le point d'affixe $d = ce^{\frac{i\pi}{3}}$. Déterminer la forme algébrique de d .
- On appelle G le barycentre des trois points pondérés $(O; -1), (D; +1), (B; +1)$.
 - Justifier l'existence de G et montrer que ce point a pour affixe $g = 4\sqrt{3} + 6i$.
 - Placer les points A, B, C, D et G sur une figure.
 - Montrer que les points C, D et G sont alignés.
 - Démontrer que le quadrilatère $OBGD$ est un parallélogramme.

EXERCICE 10

1. On considère le polynôme P de la variable complexe z , défini par :

$$P(z) = z^3 + (1 - i\sqrt{2})z^2 + (74 - i\sqrt{2})z - 74i\sqrt{2}.$$

- Déterminer le nombre réel γ tel que $i\gamma$ soit solution de l'équation $P(z) = 0$.
- Trouver deux nombres réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z , on ait

$$P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b).$$

c. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

2. Le plan complexe est rapporté à un repère normé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 1 cm pour unité graphique.

- Placer les points A, B et I d'affixes respectives $z_A = -7 + 5i$; $z_B = -7 - 5i$ et $z_I = i\sqrt{2}$.
- Placer le point C d'affixe $z_C = 1 + i$.
Déterminer l'affixe du point N tel que $ABCN$ soit un parallélogramme.
- Placer le point D d'affixe $z_D = 1 + 11i$.

Calculer $Z = \frac{z_A - z_C}{z_D - z_B}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique. Justifier que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires et en déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

EXERCICE 11

On considère le polynôme P défini par : $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$.

- Calculer $P(i\sqrt{3})$ et $P(-i\sqrt{3})$ puis montrer qu'il existe un polynôme Q du second degré à coefficients réels, que l'on déterminera, tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait $P(z) = (z^2 + 3)Q(z)$.
- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$.
- Placer dans le plan complexe rapporté au repère normé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_A = i\sqrt{3}$, $z_B = -i\sqrt{3}$, $z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$ et $z_D = \overline{z_C}$, puis montrer que ces quatre points appartiennent à un même cercle.
- On note E le symétrique de D par rapport à O . Montrer que $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ puis déterminer la nature du triangle BEC .

EXERCICE 12

Le plan P est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ [unité graphique : 2 cm].

On considère les points I et A d'affixes respectives 1 et -2 . Le point K est le milieu du segment $[IA]$. On appelle (C) le cercle de diamètre $[IA]$.

Faire une figure et la compléter au fur et à mesure de l'exercice.

- Soit B le point d'affixe b où $b = \frac{1+4i}{1-2i}$. Ecrire b sous forme algébrique et montrer que B appartient au cercle (C) .
- Soit D le point du cercle (C) tel que $(\overline{KI}, \overline{KD}) = \frac{\pi}{3} + k2\pi$, où k est un entier relatif, et soit d l'affixe de D .
 - Quel est le module de $d + \frac{1}{2}$. Donner un argument de $d + 2$.
 - En déduire que $d = \frac{1}{4} + \frac{3i\sqrt{3}}{4}$.
 - Déterminer un réel a vérifiant l'égalité : $\frac{1+2ia}{1-ia} = \frac{1}{4} + \frac{3i\sqrt{3}}{4}$.
- Soit x un réel non nul et M le point d'affixe $m = \frac{1+2ix}{1-ix}$. On pose $Z = \frac{m-1}{m+2}$. Calculer Z et en déduire la nature du triangle AIM .
- Soit N un point, différent de A , du cercle (C) et n son affixe. Démontrer qu'il existe un réel y tel que $n = \frac{1+2iy}{1-iy}$.

KKK 'G' A5H<G'H?

Mathématiques



Correction de la Serie d'exercices n°1

Thème: **Nombres complexes**

Professeur : *Dhaouadi Nejib*

KKK 'G? A5H<G'H?

Correction de l'exercice n° 1

a.

$$z^2 = \left(-\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}} \right)^2 = 2 + \sqrt{2} - 2i\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}} + i^2(2-\sqrt{2})$$

$$= 2 + \sqrt{2} - 2i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} - 2 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{4-2} = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}.$$

$$b. z^2 = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2} = 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 4e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

$$c. z^2 = 4e^{-i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow |z^2| = |z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2, \arg(z^2) = -\frac{\pi}{4}[2\pi] \Leftrightarrow 2\arg(z) = -\frac{\pi}{4}[2\pi] \Leftrightarrow \arg(z) = -\frac{\pi}{8}[\pi].$$

Sur $[-\pi; \pi]$, on aurait soit $z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{8}}$, soit $z_2 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right)} = 2e^{i\frac{7\pi}{8}}$.

Le signe de la partie réelle et de la partie imaginaire de z donné dans l'énoncé nous donne

$$z = z_2 = 2e^{i\frac{7\pi}{8}}.$$

Correction de l'exercice n°2

1. Soit on développe brutalement en utilisant le binôme de Newton, soit on calcule d'abord $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i$, ce qui donne $(1+i)^6 = (2i)^3 = -8i$. Une autre possibilité était de mettre

$1+i$ sous forme trigonométrique : $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ d'où $(1+i)^6 = \sqrt{2}^6 e^{i6\frac{\pi}{4}} = 8e^{i\frac{3\pi}{2}} = -8i$.

2. a. Comme $(1+i)^6 = -8i$, on a $\left[(1+i)^3 \right]^2 = -8i$ donc $(1+i)^3$ est une solution. On peut développer et trouver $-2+2i$.

b. D'une manière générale l'équation $z^2 = u$ a les deux solutions $z = \sqrt{u}$ et $z = -\sqrt{u}$, soit ici l'autre racine $z = -(1+i)^3 = -(1+i)^2(1+i) = -2i(1+i) = 2-2i$.

3. De la même manière on peut écrire $(1+i)^6 = \left[(1+i)^2 \right]^3$ donc $(1+i)^2$ est une solution de (E') (on peut simplifier et trouver $2i$).

Correction de l'exercice n°3

$$\cos 5x = \frac{e^{i5x} + e^{-i5x}}{2}, \quad \cos 25x = \left(\frac{e^{i5x} + e^{-i5x}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}(e^{i10x} + 2 + e^{-i10x}), \quad \sin 3x = \frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i}$$

$$\begin{aligned} \cos 25x \sin 3x &= \frac{1}{4}(e^{i10x} + 2 + e^{-i10x}) \times \frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i} = \frac{1}{8i}(e^{i13x} - e^{i7x} + 2e^{i3x} - 2e^{-i3x} + e^{-i7x} - e^{-i13x}) \\ &= \frac{1}{8i}(e^{i13x} - e^{-i13x} - e^{i7x} + e^{-i7x} + 2e^{i3x} - 2e^{-i3x}) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{e^{i13x} - e^{-i13x}}{2i} - \frac{e^{i7x} - e^{-i7x}}{2i} + 2 \frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i} \right) \\ &= \frac{1}{4}(\sin 13x - \sin 7x + 2\sin 3x) \end{aligned}$$

Correction de l'exercice n°4

$$a. z = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

$$z^2 = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}} = -2 - 2i\sqrt{3}, z^3 = 8e^{-i\frac{3\pi}{3}} = -8.$$

Comme on tourne à chaque fois de 60° , tous les exposants multiples de 3 ramèneront sur l'axe réel (un coup positif, un coup négatif) ; tous les multiples de 3 + 1 (comme 1, 4, 7, ...) seront sur la droite issue de O et passant par z , enfin tous les multiples de 3 + 2 seront sur la droite issue de O passant par z^2 .

1992 est un multiple de 6 (3x332), on a $z^{1992} = 2^{1992} e^{-332i\pi} = 2^{1992} \mathbb{k}$, et

$$z^{1994} = 2^{1994} e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2^{1994} \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

b. $z^3 + 8 = 0$ a comme racine évidente -2 ; on factorise $z + 2$: $z^3 + 8 = (z + 2)(az^2 + bz + c)$ ce qui donne en développant et identifiant les coefficients : $z^3 + 8 = (z + 2)(z^2 - 2z + 4)$.

Les autres racines sont alors : $z_1 = 1 + i\sqrt{3}, z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

Pour résoudre $(iz - 1)^3 + 8 = 0$ on reprend l'équation précédente avec le changement d'inconnue $Z = iz - 1$, ce qui donne les solutions en Z ; on revient en arrière pour les solutions en z .

$$Z = iz - 1 \Leftrightarrow iz = Z + 1 \Leftrightarrow z = \frac{Z + 1}{i} = -iZ - i \text{ d'où les trois solutions :}$$

$$z_0 = -i(-2) - i = i, z_1 = -i(1 + i\sqrt{3}) - i = \sqrt{3} - 2i \text{ et } z_2 = -i(1 - i\sqrt{3}) - i = -\sqrt{3} - 2i.$$

Correction de l'exercice n°5

$$1. \begin{cases} z_1\sqrt{3} - z_2 = -2 \\ z_1 - z_2\sqrt{3} = -2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1\sqrt{3} - z_2 = -2 \\ -z_1\sqrt{3} + 3z_2 = 2\sqrt{3}i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z_2 = -2 + 2i\sqrt{3} \\ z_1\sqrt{3} - z_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = -1 + i\sqrt{3} \\ z_1 = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3} + i \end{cases}$$

$$2. z_A = -\sqrt{3} + i = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} \text{ et } z_B = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

$$3. \frac{z_A}{z_B} = \frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}} = e^{i\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ donc module 1 et argument } \frac{\pi}{6}.$$

Le triangle ABO est isocèle en O puisque $|z_A| = |z_B|$ et $(\overline{OA}, \overline{OB}) = \arg \frac{z_B}{z_A} = -\frac{\pi}{6}$.

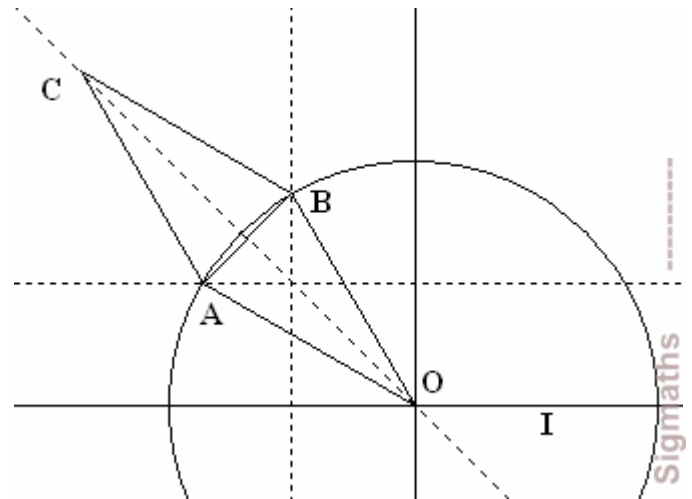
4. On doit avoir $\overline{AC} = \overline{OB}$, soit

$$z_C - z_A = z_B - z_O \Leftrightarrow z_C = z_A + z_B = -1 - \sqrt{3} + i(\sqrt{3} + 1) = (\sqrt{3} + 1)(-1 + i).$$

KKK 'G' A5H G'H?

L'aire du triangle ABC est :

$$\begin{aligned} \frac{AB}{2} \times \frac{OC}{2} &= \frac{1}{4} |z_B - z_A| |z_C - z_O| \\ &= \frac{1}{4} |-1 + i\sqrt{3} + \sqrt{3} - i| |(\sqrt{3} + 1)(-1 + i)| \\ &= \frac{1}{4} (\sqrt{3} - 1) |1 + i| (\sqrt{3} + 1) |-1 + i| \\ &= \frac{1}{4} \times 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 1, \text{ soit } 16 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$



Correction de l'exercice n°6

Partie A

$a = 5 + 5i$, $b = 1 + 3i$ et $c = 8 - 4i$.

1. $\Omega(5)$; $\Omega A = |5 + 5i - 5| = 5$, $\Omega B = |1 + 3i - 5| = |-4 + 3i| = \sqrt{16 + 9} = 5$ et

$\Omega C = |8 - 4i - 5| = |3 - 4i| = 5$ donc A, B et C sont des points du cercle Γ .

2. On vérifie par exemple que D est sur BC , soit que \overline{BD} est colinéaire à \overline{BC} :

$$\begin{vmatrix} 2-1 & 8-1 \\ 2-3 & -4-3 \end{vmatrix} = -7 + 7 = 0 \text{ et que } \overline{OD} \text{ est orthogonal à } \overline{BC} : \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \end{pmatrix} = 14 - 14 = 0.$$

Partie B $z' = \frac{20}{\bar{z}}$.

1. On peut écrire $z' = \frac{20}{\bar{z}} = \frac{20z}{\bar{z}z} \Rightarrow \overline{OM'}$ = $\frac{20}{OM^2} \overline{OM}$, ce qui montre que les points O, M et M' sont alignés.

2. a. M a pour affixe $z = 2 + iy$ donc $z + \bar{z} = 2 + iy + 2 - iy = 4$.

b. $z' + \bar{z}' = \frac{20}{\bar{z}} + \frac{20}{z} = \frac{20}{\bar{z}} + \frac{20}{z} = \frac{20(z + \bar{z})}{\bar{z}z} = \frac{80}{\bar{z}z}$; on a donc $5(z' + \bar{z}') = \frac{400}{\bar{z}z} = \frac{20}{\bar{z}} \cdot \frac{20}{z} = z' \bar{z}'$.

c. Il est clair que M' est sur (OM) puisque O, M et M' sont alignés. Il reste à montrer que M' est sur Γ , soit que

$$|z' - 5| = 5 \Leftrightarrow (z' - 5)(\overline{z' - 5}) = 25 \Leftrightarrow (z' - 5)(\bar{z}' - 5) = 25 \Leftrightarrow z' \bar{z}' - 5(z' + \bar{z}') + 25 = 25 \Leftrightarrow z' \bar{z}' = 5(z' + \bar{z}')$$

Correction de l'exercice n°7

1. Une équation ultra-classique qui donne les racines $z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et

$$z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}.$$

2. $z_1^2 = \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \frac{1 - 3 - 2i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = z_2.$

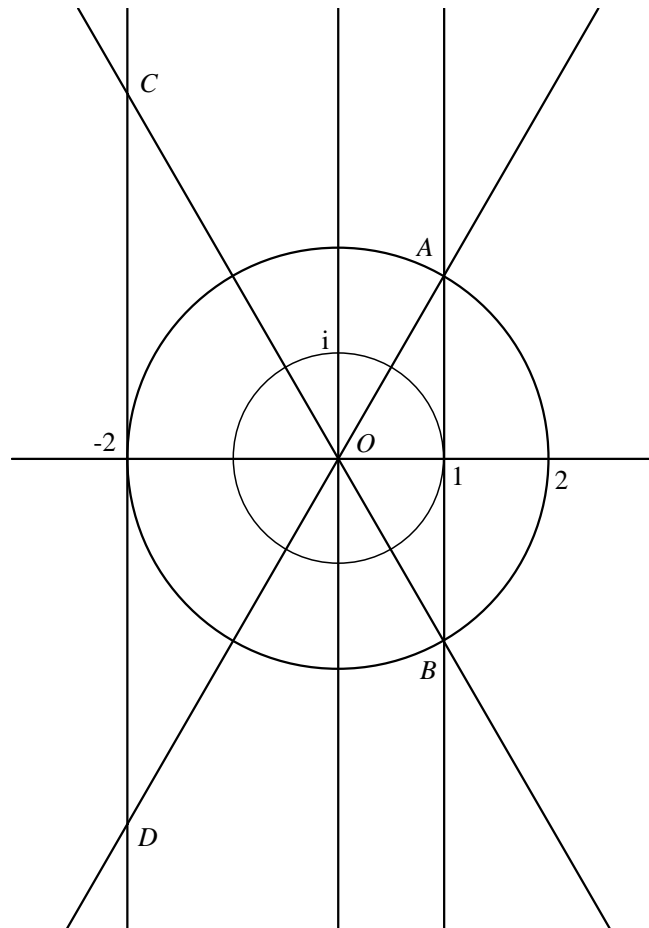
3. Déjà fait.

4. Les points en question forment un triangle équilatéral avec le point d'affixe 1 sur le cercle trigo.

Correction de l'exercice n°8

1. $z^2 - 2z + 4 = 0$: les racines sont $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$, dont le module est 2 et l'argument $\pi/3$ et $-\pi/3$. Pour les carrés on a $z_1^2 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} = -2 + 2i\sqrt{3}$ et $z_2^2 = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}} = -2 - 2i\sqrt{3}$.

2. a. Comme on pouvait s'y attendre (enfin, des fois c'est différent...) les résultats du 1. se retrouvent comme affixes des points du 2. On fait la figure :



$ABCD$ est un trapèze isocèle (les droites (AB) et (CD) sont verticales donc parallèles ; les points A et B étant conjugués sont symétriques par rapport à (Ox) , même chose pour C et D .

b. Avec les arguments c'est immédiat, sinon on utilise les vecteurs : par ex.

$\overline{OC} = -2 + 2i\sqrt{3} = -2(1 - i\sqrt{3}) = -2\overline{OB}$. La symétrie par rapport à l'axe réel montre que les diagonales se coupent en O .

c. $\overline{AD} = -2 - 2i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3} = -3 - 3i\sqrt{3}$ et $\overline{AC} = -2 + 2i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3} = -3 + i\sqrt{3}$. On peut faire le produit scalaire : $\overline{AD} \cdot \overline{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = 9 - 9 = 0$. C'est bon.

Correction de l'exercice n°9

1. $z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0 : \Delta = 64.3 - 4.64 = -64 = (8i)^2$ d'où $z_1 = \frac{8\sqrt{3} + 8i}{2} = 4\sqrt{3} + 4i$

ou $z_2 = 4\sqrt{3} - 4i$.

2. a. $a = 4\sqrt{3} - 4i = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 8e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $b = 4\sqrt{3} + 4i = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 8e^{i\frac{\pi}{6}}$.

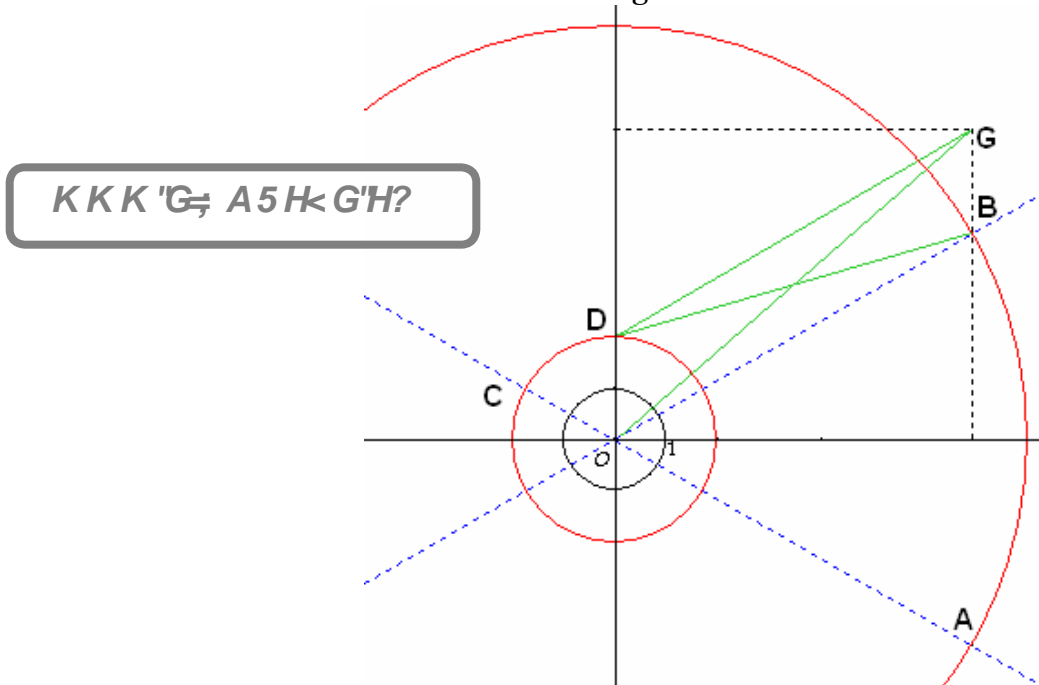
b. Il est immédiat que $OA = OB = 8$; $AB = |b - a| = |4\sqrt{3} + 4i - 4\sqrt{3} + 4i| = |8i| = 8$.

OAB est équilatéral.

3. $d = e^{-i\frac{\pi}{3}}(-\sqrt{3} + i) = e^{-i\frac{\pi}{3}} 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2e^{i\frac{3\pi}{6}} = 2i$

4. a. G : barycentre de $(O ; -1), (D ; +1), (B ; +1)$ existe car la somme des coefficients n'est pas nulle. Son affixe est $z_G = \frac{1}{-1+1+1}(-1.z_O + 1.z_D + 1.z_B) = d + b = 2i + 4\sqrt{3} + 4i = 4\sqrt{3} + 6i$.

b. Il faut évidemment utiliser les formes trigo...



c. C, D et G sont alignés : \overline{CD} a pour affixe $d - c = 2i - (-\sqrt{3} + i) = \sqrt{3} + i$ et \overline{DG} a pour affixe $g - d = 4\sqrt{3} + 6i - 2i = 4\sqrt{3} + 4i = 4(d - c)$ donc $\overline{DG} = 4\overline{CD}$.

d. Appelons K le milieu de $[BD]$, alors G est le barycentre de $(O ; -1), (K ; 2)$ d'où $\overline{OG} = \frac{2}{-1+2}\overline{OK} \Leftrightarrow \overline{OG} = 2\overline{OK}$, donc K est le milieu de $[OG]$. Mêmes milieux donc parallélogramme.

SigmaMaths © SigmaMaths © SigmaMaths © SigmaMaths © SigmaMaths

Correction de l'exercice n°10

1. a. iy solution de l'équation $P(z) = 0$, soit $P(iy) = 0$, soit

$$-iy^3 - (1 - i\sqrt{2})y^2 + (74 - i\sqrt{2})iy - 74i\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (y^2 + \sqrt{2}y) + i(-y^3 + \sqrt{2}y^2 + 74y - 74\sqrt{2}) = 0.$$

Ceci donne le système $\begin{cases} y^2 + \sqrt{2}y = 0 \\ -y^3 + \sqrt{2}y^2 + 74y - 74\sqrt{2} = 0 \end{cases}$; la première ligne donne comme solutions

$y = 0$ qui ne convient pas dans la seconde ligne et $y = -\sqrt{2}$ qui convient.

b. $P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b) = (z - i\sqrt{2})(z^2 + z + 74)$.

c. $P(z) = 0 : z^2 + z + 74 = 0$, $\Delta = 1 - 296 = -295 = i^2 \times 5 \times 59$ d'où les racines

$$z_1 = i\sqrt{2}, z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{295}}{2}, z_3 = \frac{-1 - i\sqrt{295}}{2}.$$

2. b. $ABCN$ parallélogramme si $\overline{AB} = \overline{NC} \Leftrightarrow z_N = z_A - z_B + z_C = 7 + 5i - 7 + 5i + 1 + i = 1 + 11i$.

c. Calculer $Z = \frac{z_A - z_C}{z_D - z_B} = \frac{-7 + 5i - 1 - i}{1 + 11i + 7 + 5i} = \frac{-8 + 4i}{8 + 16i} = \frac{(-2 + i)(2 - 4i)}{4 + 16} = \frac{10i}{20} = \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}i$.

On a donc $Z = \frac{z_A - z_C}{z_D - z_B}$ imaginaire donc les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires ; comme

$ABCD$ est un parallélogramme, c'est un losange.

Correction de l'exercice n°11

1. $P(i\sqrt{3}) = 9 - 6(-i3\sqrt{3}) - 72 - i18\sqrt{3} + 63 = 0$, $P(-i\sqrt{3}) = 9 - 6(i3\sqrt{3}) - 72 + i18\sqrt{3} + 63 = 0$.

$P(z) = (z^2 + 3)(z^2 + az + b) = z^4 + az^3 + (a + 3b)z^2 + 3az + 3b$ donc $a = -6$ et $b = 21$, soit

$P(z) = (z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21)$.

2. $z^2 - 6z + 21 : \Delta = 36 - 84 = -48 = (i4\sqrt{3})^2$, $z_1 = \frac{6 + i4\sqrt{3}}{2} = 3 + 2i\sqrt{3}$, $z_2 = \frac{6 - i4\sqrt{3}}{2} = 3 - 2i\sqrt{3}$.

$P(z) = 0$ a pour racines $i\sqrt{3}$ et $-i\sqrt{3}$ ainsi que z_1 et z_2 .

3. Comme A et B d'un côté, C et D de l'autre sont symétriques par rapport à l'axe $((O, \vec{u}))$, les triangles ABC et ABD ont mêmes cercles circonscrits, ils appartiennent donc au même cercle.

4. E , le symétrique de D par rapport à O a pour affixe $-z_D = -3 + 2i\sqrt{3}$.

$$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{3 + 2i\sqrt{3} + i\sqrt{3}}{-3 + 2i\sqrt{3} + i\sqrt{3}} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{-1 + i\sqrt{3}} = \frac{(1 + i\sqrt{3})(-1 - i\sqrt{3})}{1 + 3} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

Le triangle BEC est donc équilatéral.

Correction de l'exercice n°12

1. b = $\frac{1 + 4i}{1 - 2i} = \frac{(1 + 4i)(1 + 2i)}{1 + 4} = \frac{1 + 4i + 2i - 8}{5} = -\frac{7}{5} + i\frac{6}{5}$.

B appartient au cercle (C) si et seulement si $BK = IK = 1,5$:

$$\overline{BK}(z_K - z_B) \text{ avec } z_K - z_B = -\frac{1}{2} - b = -\frac{1}{2} + \frac{7}{5} - i\frac{6}{5} = \frac{9}{10} - i\frac{6}{5} \text{ d'où}$$

$$|z_K - z_B|^2 = \left| \frac{9}{10} - i\frac{6}{5} \right|^2 = \frac{81}{100} + \frac{36}{25} = \frac{81}{100} + \frac{144}{100} = \frac{225}{100} \text{ donc } BK = \frac{15}{10} = 1,5 \text{ et B appartient au cercle (C).}$$

2. a. $\overline{KD}(d + \frac{1}{2}), \left| d + \frac{1}{2} \right| = KD = 1,5$ car D appartient au cercle (C),

$$\arg(d + \frac{1}{2}) = (\vec{u} ; \overline{KD}) = (\overline{KI} ; \overline{KD}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

b. On en déduit que

$$d + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{2} (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) = \frac{3}{2} (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3}{4} + i\frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ donc } d = \frac{3}{4} + i\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + i\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

c.

$$\frac{1+2ia}{1-ia} = \frac{1}{4} + \frac{3i\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow 4(1+2ia) = (1-ia)(1+3i\sqrt{3}) \Leftrightarrow 4+8ia = 1+3i\sqrt{3}-ia+3a\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 4+8ia = 1+3a\sqrt{3}+i(3\sqrt{3}-a) \Leftrightarrow \begin{cases} 1+3a\sqrt{3} = 4 \\ 3\sqrt{3}-a = 8a \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

3. $Z = \frac{m-1}{m+2} = \frac{\frac{1+2ix}{1-ix} - 1}{\frac{1+2ix}{1-ix} + 2} = \frac{1+2ix-1+ix}{1+2ix+2-2ix} = \frac{3ix}{3} = ix, |Z|=|x| \text{ et } \arg(Z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

or $\arg(Z) = \arg(\frac{m-1}{m+2}) = (\overline{AM} ; \overline{IM})$ donc le triangle AIM est rectangle en M, ce qui signifie que le point M appartient au cercle (C).

4. $n = \frac{1+2iy}{1-iy} \Leftrightarrow n(1-iy) = 1+2iy \Leftrightarrow n - iny = 1+2iy \Leftrightarrow y(2i+ni) = n-1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{i} \frac{n-1}{n+2} = -i \frac{n-1}{n+2}$

car $n \neq -2$ puisque N est différent de A. Vérifions que y est réel [si $n = 1$ ($N = I$) alors on prend $y = 0$]:

$$\arg y = \arg(-i \frac{n-1}{n+2}) = \arg(-i) + \arg(\frac{n-1}{n+2}) = -\frac{\pi}{2} + 2k'\pi + \frac{\pi}{2} + k''\pi = k\pi \text{ donc } y \text{ est réel.}$$

KKK 'G? A5H<G'H?