

A : "Les deux boules tirées portent des numéros impairs "

B : "Les deux boules tirées sont de la même couleur "

C : "Les deux boules tirées portent des numéros impairs et sont de la même couleur".

D : "Les deux boules tirées portent des numéros impairs ou sont de la même couleur ".

2) On tire successivement et avec remise deux boules de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

E : "Les deux boules tirées sont de parités différentes".

F : "Obtenir au moins une boule noire ".

Exercice n°4

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soient z un nombre complexe différent de i et M son image dans le plan complexe.

On pose $t = \frac{z}{z - i}$

1) Montrer que si $z = x + iy$ où x et y sont des réels alors:

$$t = \frac{x^2 + y^2 - y}{x^2 + (y - 1)^2} + i \frac{x}{x^2 + (y - 1)^2}.$$

2) Déterminer alors les ensembles suivants:

a) $E = \{M(z) \text{ tel que } t \in \mathbb{R}\}$

b) $F = \{M(z) \text{ tel que } t \text{ est imaginaire pur}\}$

Exercice n°5

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on donne la droite D passant par le

point $A(0, 1, 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et la droite D' admettant comme système

d'équations cartésiennes : $\begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ x + y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$

1) Donner une représentation paramétrique de la droite D' .

2) Montrer que les droites D et D' ne sont pas coplanaires.

3) Vérifier que $x + 3y - 5z + 2 = 0$ est une équation cartésienne du plan P parallèle à D' et contenant D .

4) On donne les points $H \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5} \right)$ et $K \left(\frac{13}{35}, \frac{4}{35}, \frac{26}{35} \right)$.

a) Vérifier que: $H \in D$, $K \in D'$ et que la droite (HK) est perpendiculaire à chacune des droites D et D'

Correction du devoir

Exercice n°1

1°) Le nombre des applications d'un ensemble de n éléments ($n \geq 2$) dans un ensemble d'un seul élément est égal à $1^n = 1$ c'est **la réponse c)**

2°) Le nombre de triplets d'un ensemble de quatre éléments est égal au nombre des applications d'un ensemble de trois éléments dans un ensemble de quatre éléments donc égal à $4^3 = 64$.
Alors la réponse correcte est **la réponse a)**

3°) On sait, d'après la formule du binôme, que : $(1+x)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k (x^k \times 1^{12-k}) = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k x^k$

Donc, pour $k = 10$ obtient le coefficient $C_{12}^{10} = \frac{12!}{10!2!} = \frac{12 \times 11}{2} = 66$

D'où la réponse correcte est **la réponse c)**.

Exercice n°2

1) a) Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 0 \in [0, 1]$ donc vrai

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leq u_n \leq 1$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

$$0 \leq u_n \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq u_n + 2 \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{u_n + 2} \leq \frac{1}{2} \quad (*)$$

$$D'autre part $0 \leq u_n \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2u_n \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq 2u_n + 1 \leq 3 \quad (**)$$$

Faisant le produit membre à membre des deux encadrements (*) et (**).

On obtient $\frac{1}{3} \leq u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$. Désolé ce n'est pas le résultat voulu!!!

Bien sure, je l'est fait ici exprès. Vous remarquez alors que cette méthode classique ne donne pas, dans certain cas, le résultat désiré, et pour cela il faut une méthode plus efficace.

$$Il \text{ suffit d'écrire } u_{n+1} \text{ autrement: } u_{n+1} = \frac{2(u_n + 2) - 3}{u_n + 2} = 2 - \frac{3}{u_n + 2}$$

$$On \text{ a, d'après } (*), \frac{1}{3} \leq \frac{1}{u_n + 2} \leq \frac{1}{2} \text{ donc } -\frac{3}{2} \leq -\frac{3}{u_n + 2} \leq -1$$

$$D'où $2 - \frac{3}{2} \leq 2 - \frac{3}{u_n + 2} \leq 2 - 1$ ou encore $0 \leq \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$. Cqfd.$$

$$2) u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} - u_n = \frac{2u_n + 1 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2} = \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{u_n + 2}$$

Et comme $0 \leq u_n \leq 1$, alors $1 - u_n \geq 0$, $1 + u_n \geq 0$ et $u_n + 2 > 0$.

D'où $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et la suite (u_n) est croissante.

$$2) a) v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2} - 1}{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2} + 1} = \frac{2u_n + 1 - u_n - 2}{2u_n + 1 + u_n + 2} = \frac{u_n - 1}{3(u_n + 1)} = \frac{1}{3}v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = -1$.

$$b) v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \Leftrightarrow u_n v_n + v_n = u_n - 1 \Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -v_n - 1 \Leftrightarrow u_n = -\frac{v_n + 1}{v_n - 1}.$$

$$\text{Et enfin } u_n = -\frac{-\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1}{-\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

c) Comme $\frac{1}{3} \in]-1, 1[$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{1} = 1$.

Exercice n°3

$$1) \text{Card}\Omega = C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

$$\text{Card}A = C_4^2 = \frac{4 \times 3}{2} = 6, \text{ donc } p(A) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$

«Tirer deux boules de meme couleur» \Leftrightarrow «Tirer deux boules noires ou deux boules blanches»

$$\text{Card}B = C_4^2 + C_2^2 = 6 + 1 = 7, \text{ donc } p(B) = \frac{7}{15}$$

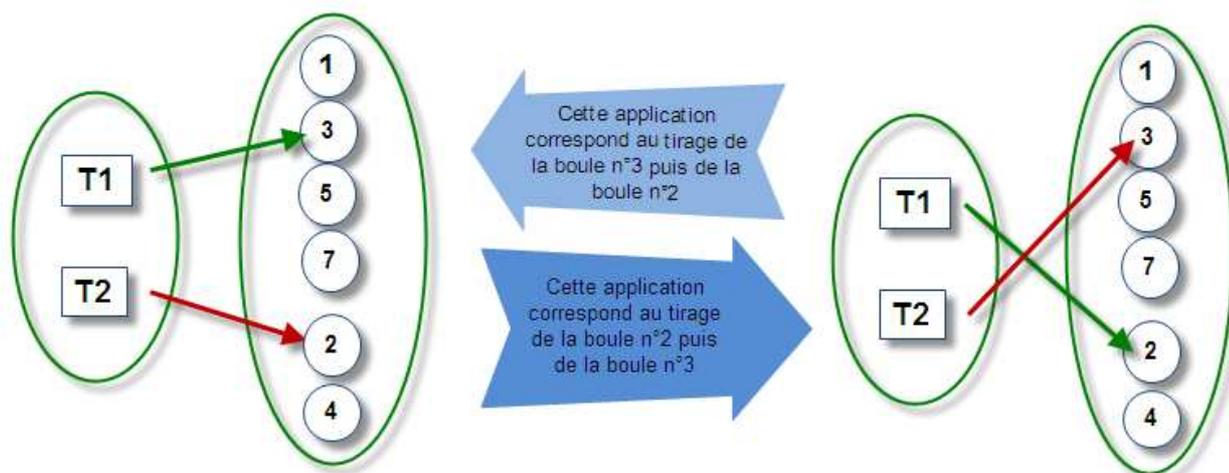
C est équivalent à l'événement «Tirer deux boules noires portant des numéros impairs»

$$\text{Card}C = C_3^2 = 3, \text{ donc } p(C) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}. \text{ Remarquer que } C = A \cap B.$$

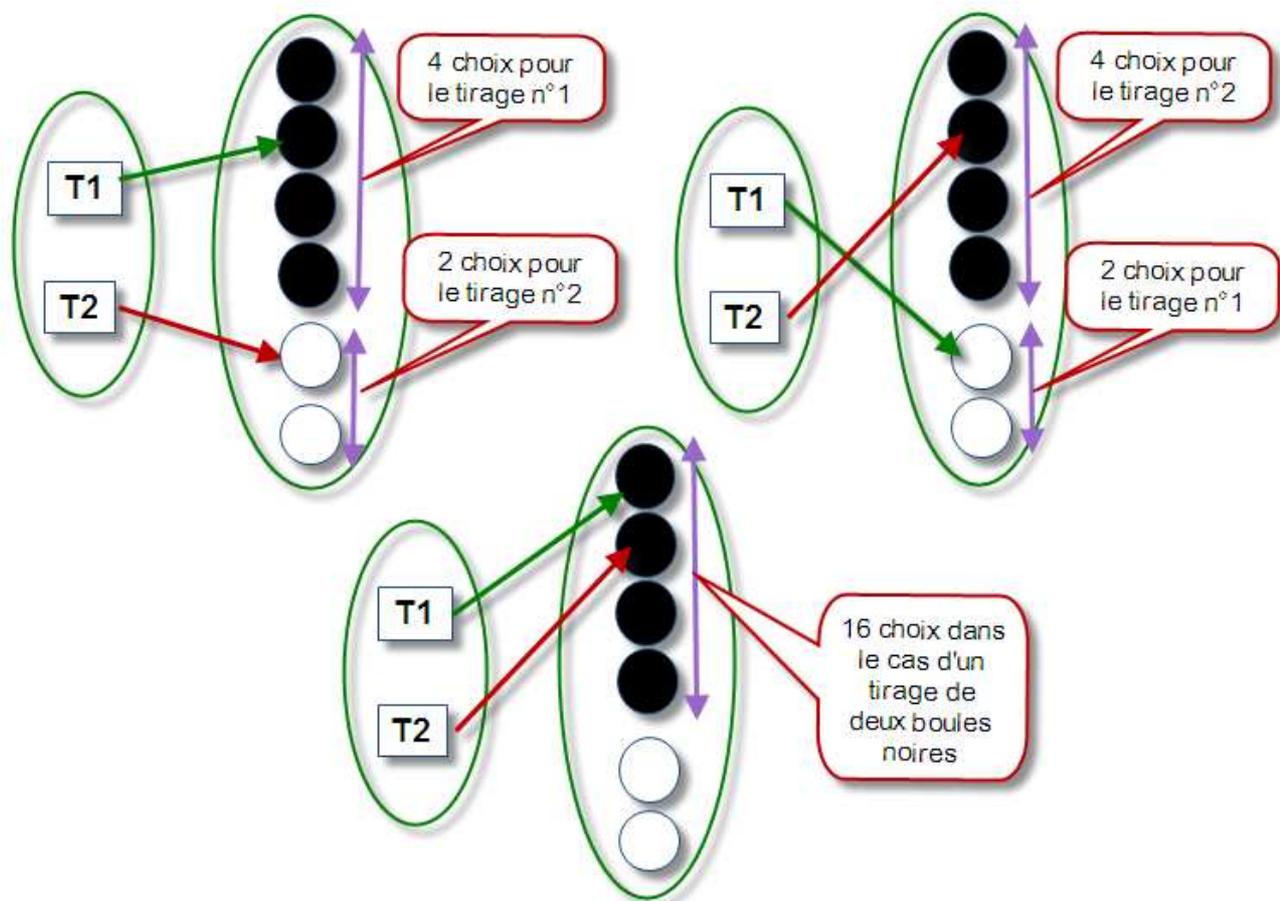
$$p(D) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{2}{5} + \frac{7}{15} - \frac{1}{5} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

2) Un tirage successif et avec remise de deux boules parmi six boules est assimilé à une application d'un ensemble de deux éléments dans un ensemble de six éléments.

$$\text{Card}\Omega = 6^2 = 36$$



$$CardE = 2 \times 2^1 \times 4^1 = 16 \quad \text{donc} \quad p(E) = \frac{CardE}{Card\Omega} = \frac{16}{6^2} = \frac{4}{9}$$



$$CardF = 2 \times \frac{4^1 \times 2^1}{6^2} + \frac{4^2}{6^2} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$$

Exercice n°4

$$1) t = \frac{z}{z-i} = \frac{x+iy}{x+i(y-1)} = \frac{(x+iy)[x-i(y-1)]}{x^2+(y-1)^2} = \frac{x^2-ix(y-1)+ixy+y(y-1)}{x^2+(y-1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - y}{x^2 + (y-1)^2} + i \frac{xy - xy + x}{x^2 + (y-1)^2} = \frac{x^2 + y^2 - y}{x^2 + (y-1)^2} + i \frac{x}{x^2 + (y-1)^2}$$

2) a) $t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } (x, y) \neq (0, 1)$

Donc E est l'axe des ordonnées privé du point A(0,1).

b) t est imaginaire pur $\Leftrightarrow \text{R}(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - y = 0 \\ (x, y) \neq (0, 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \\ (x, y) \neq (0, 1) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ (x, y) \neq (0, 1) \end{cases}$$

On vérifie bien que le point A(0,1) appartient au cercle (C).

Donc F est le cercle (C) de centre le point I $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$, privé du point A(0,1).

Exercice n°5

1) On pose $z = \alpha \in \mathbb{R}$.

$$M(x, y, z) \in D' \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 - \alpha \\ x + y = -1 + 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \alpha \\ x - y = 1 - \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Il suffit de faire la somme des deux égalités

ou encore $\begin{cases} x = \frac{\alpha}{2} \\ y = x - 1 + \alpha = -1 + \frac{3\alpha}{2} \\ z = \alpha \end{cases}$

Donc $D' : \begin{cases} x = \frac{\alpha}{2} \\ y = -1 + \frac{3}{2}\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \\ z = \alpha \end{cases}$

2) $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D'

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} - 1 \neq 0 \text{ donc les vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ne sont pas colinéaires. (*)}$$

Une représentation paramétrique de D :
$$\begin{cases} x = -\beta \\ y = 1 + 2\beta \quad (\beta \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + \beta \end{cases}$$

$$M(x, y, z) \in D \cap D' \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\beta = \frac{\alpha}{2} \\ y = 1 + 2\beta = -1 + \frac{3\alpha}{2} \\ z = 1 + \beta = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -2\beta \\ 1 + 2\beta = -1 - 3\beta \\ 1 + \beta = -2\beta \end{cases} \Rightarrow \beta = \frac{-1}{3} = \frac{-2}{5}$$

Ce qui est impossible et permet d'affirmer que $D \cap D' = \emptyset$. (**)

D'après (*) et (**) D et D' sont non coplanaires.

3) $M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{AM}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{2} & x \\ 2 & \frac{3}{2} & y-1 \\ 1 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}(z-1) + 2x + \frac{1}{2}(y-1) - \frac{3}{2}x + (y-1) - 2\frac{1}{2}(z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}z + \frac{3}{2} + 2x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x + y - 1 - z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y - \frac{5}{2}z - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 5z - 1 = 0$$

4)

$$\begin{cases} \frac{2}{5} = -\beta \\ \frac{1}{5} = 1 + 2\beta \\ \frac{3}{5} = 1 + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\frac{2}{5} \\ \beta = -\frac{2}{5} \\ \beta = -\frac{2}{5} \end{cases} \text{ donc } H\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right) \in D$$

$$\begin{cases} \frac{13}{35} = \frac{\alpha}{2} \\ \frac{4}{35} = -1 + \frac{3}{2}\alpha \\ \frac{26}{35} = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{26}{35} \\ \alpha = \frac{2}{3} \frac{39}{35} = \frac{26}{35} \\ \alpha = \frac{26}{35} \end{cases} \text{ donc } K\left(\frac{13}{35}, \frac{4}{35}, \frac{26}{35}\right) \in D'$$

$$\overrightarrow{HK} \begin{pmatrix} -\frac{1}{35} \\ \frac{3}{35} \\ -\frac{3}{35} \\ \frac{5}{35} \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} \overrightarrow{HK} \cdot \vec{u} = \frac{1}{35} - \frac{6}{35} + \frac{5}{35} = 0 \Rightarrow (HK) \perp D \\ \overrightarrow{HK} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{35} \frac{1}{2} - \frac{3}{35} \frac{3}{2} + \frac{5}{35} = \frac{-1-9+10}{70} = 0 \Rightarrow (HK) \perp D' \end{matrix}$$