Epreuve

Mathématiques

Durée : 3H

Devoir de synthèse n°1

Classe : 4ème Math

Décembre 2014

Professeurs

Dhaouadi Nejib
Zahi Laabidi

Exercice 1 (4points)

On donne ci – dessous la représentation graphique $\mathscr{C}$, dans un repère orthonormé, d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

- *La droite d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.*
- *La droite d'équation $y = -1$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.*

1) A l'aide d'une lecture graphique et avec justification :

a) Déterminer les limites suivantes :

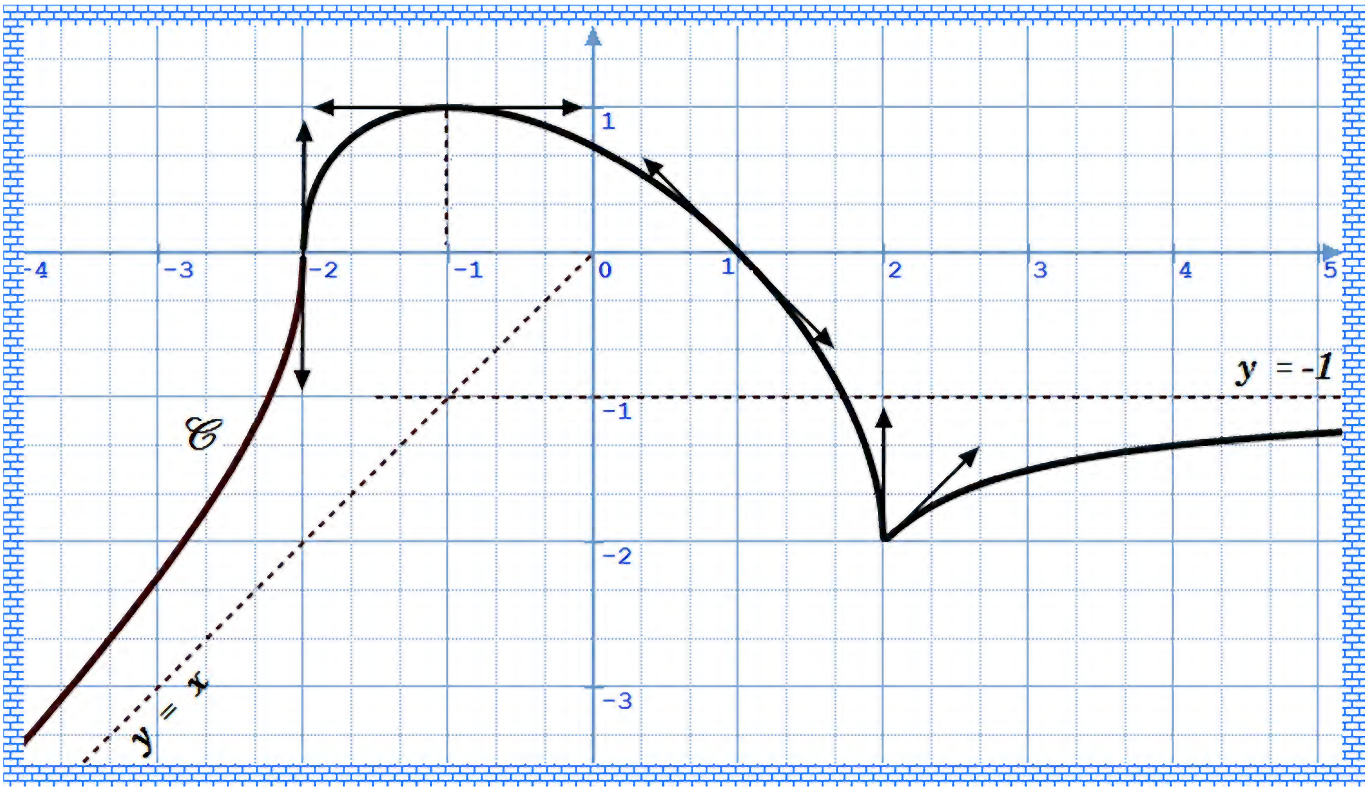
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)\ ,\quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}\ ,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)\ ,\quad \lim_{x\to(-2)^-} \frac{f(x)}{x+2}\ ,\quad \lim_{x\to(-2)^+} \frac{f(x)}{x+2}.$$

b) Déterminer $f'(-1)$, $f'(1)$ et $f_d'(2)$.

2) Drésser le tableau de variation de f .

3) Soit g la fonction définie sur $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ par : $\begin{cases} g(x) = f(2\tan x) & si\ x \neq \frac{\pi}{2} \\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \end{cases}$

Montrer que g est continue sur $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$.



Exercice 2 (7points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$. On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$. Interpréter graphiquement ces résultats.

b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall\ x \in \mathbb{R};\ f'(x) = \dfrac{2}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$.

c) Drésser le tableau de variation de f.

d) Vérifier que $f\left(\left[2,3\right]\right) \subset \left[2,3\right]$

e) Montrer que pour tout $x \in \left[2,3\right]$; $\left|f'(x)\right| \le \dfrac{2}{5\sqrt{5}}$.

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α dans l'intervalle $\left]2,3\right[$.

b) Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

c) Montrer que le point $I\left(0,1\right)$ est un centre de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}$.

d) Tracer T et $\mathscr{C}$. (Voir feuille annexe).

3) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

On note f^{-1} sa fonction réciproque.

b) Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}'$ de f^{-1} dans le même repère que $\mathscr{C}$.

4) Soit (u_n) la suite réelle définie par : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f\left(u_n\right)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \le u_n \le 3$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_{n+1} - \alpha\right| \le \dfrac{2}{5\sqrt{5}}\left|u_n - \alpha\right|$.

c) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_n - \alpha\right| \le \left(\dfrac{2}{5\sqrt{5}}\right)^n \left|2 - \alpha\right|$.

d) En déduire que (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Exercice 3 (4points)

Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z) = z^3 + 2\left(\sqrt{2} - 1\right)z^2 + 4\left(1 - \sqrt{2}\right)z - 8$.

1) a) Vérifier que $z_0 = 2$ est une solution de l'équation $P(z) = 0$.

b) Déterminer les nombres complexes a et b vérifiant :

Pour tout nombre complexe z, $P(z) = \left(z - 2\right)\left(z^2 + az + b\right)$.

c) En déduire les deux autres solutions z_1 et z_2 de l'équation $P(z) = 0$

telles que $Im\left(z_1\right) > 0$

d) Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. On donne les points A, B et C d'affixes respectives 2, $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ et le point I milieu de $[AB]$.

a) Placer les points A, B, C et I.

b) Vérifier que le triangle OAB est isocèle.

En déduire une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OI}\right)$.

c) Calculer l'affixe z_I du point I et déterminer son module.

d) Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

Exercice 4 (5points)

Dans le plan, rapporté à un repère orthonormé direct, on considère un losange $ABCD$ de centre O tel que $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})} \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

1) Soit f une isométrie qui laisse globalement invariant le losange $ABCD$.

a) Montrer que $f\left([AC]\right) = [AC]$

b) En déduire que $f(O) = O$.

c) Déterminer alors les quatre isométries qui laissent globalement invariant le losange $ABCD$. (on pourra discuter suivant $f(A)$ et $f(C)$)

2) a) Donner la nature et les éléments caractéristiques des isométries suivantes :

$f_1 = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$ et $f_2 = S_{(CD)} \circ S_{(CA)}$.

b) Caractériser alors l'isométrie $g = r_{\left(C,-\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}$.

3) On note E, F et G les symétriques respectives des points A, D et C par rapport au point B. Soit h l'isométrie telle que : $h(A) = E$, $h(B) = F$ et $h(D) = B$.

a) Montrer que h n'admet aucun point fixe.

b) En déduire que h est une symétrie glissante.

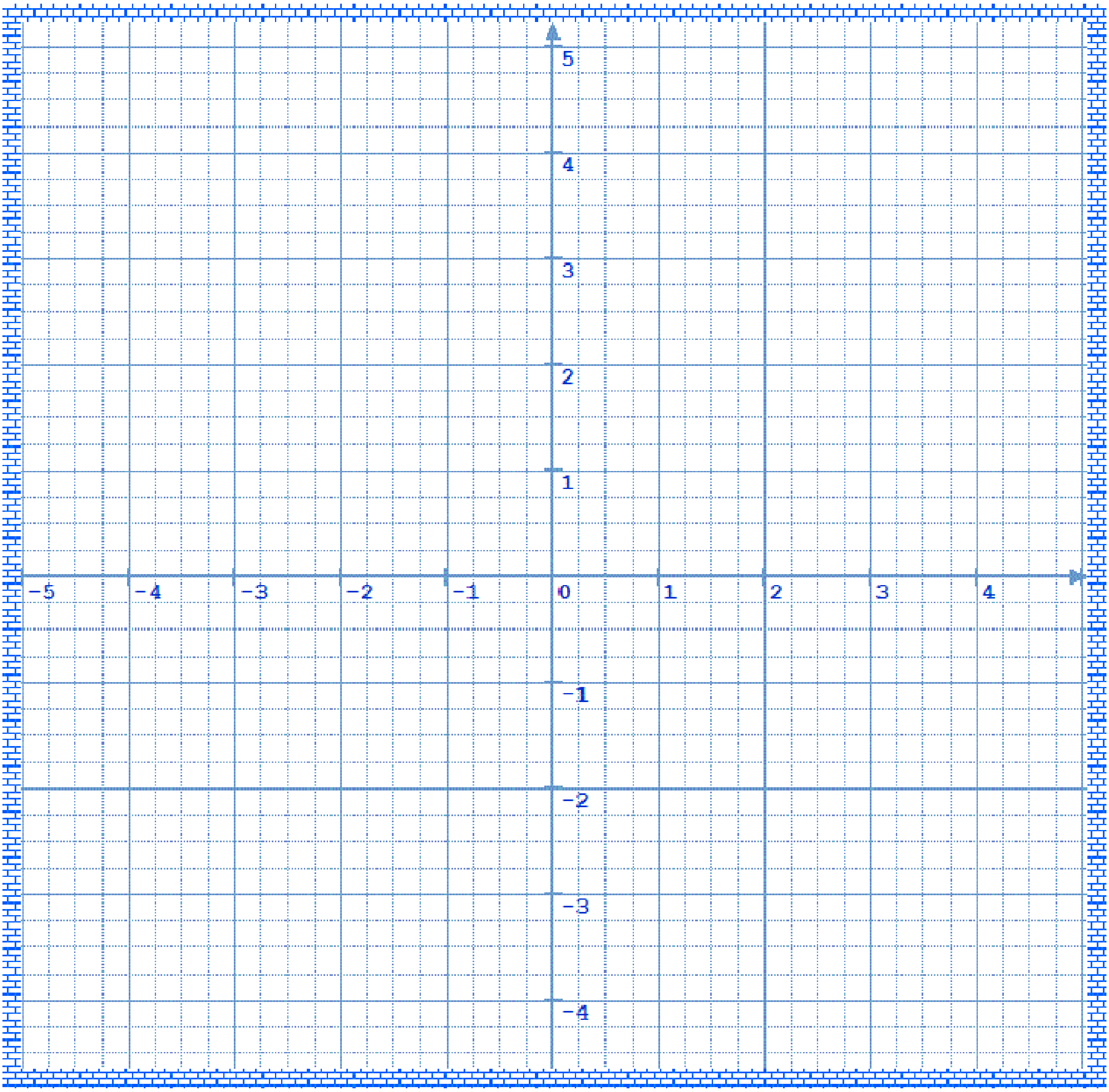
c) Montrer que $t_{\overrightarrow{BD}} \circ h = S_{(BD)}$.

d) Donner alors le vecteur et l'axe de h.

Annexe

Feuille à rendre avec la copie

Nom et prénom : .... Classe : ....



On prendra $\alpha \simeq 2,9$

Correction du devoir de synthèse n°1 4ème Math 2014-2015

Correction de l'exercice 1

1) a) $\bullet \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1 \end{cases}$ car la droite d'équation $y = x$ est une asymptote au voisinage de $-\infty$.

$\bullet \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$ car la droite d'équation $y = -1$ est une asymptote au voisinage de $+\infty$.

$\bullet \lim\limits_{x\to(-2)^-} \dfrac{f(x)}{x+2} = \lim\limits_{x\to(-2)^-} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2} = +\infty$ car la courbe $\mathscr{C}$ admet, à gauche au point d'abscisse -2, une demi tangente verticale dérigée vers le bas.

$\bullet \lim\limits_{x\to(-2)^+} \dfrac{f(x)}{x+2} = \lim\limits_{x\to(-2)^+} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2} = +\infty$ car la courbe $\mathscr{C}$ admet, à droite au point d'abscisse -2, une demi tangente verticale dérigée vers le haut.

b) $f'(-1) = 0$ car la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse -1.

$f'(1) = -1$ coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

$f'_d(2) = 1$ coefficient directeur de la demi tangente, à droite, au point d'abscisse 2.

2)

x	$-\infty$		-2		-1		2		
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$			1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1

3) $\begin{cases} \text{La fonction } \varphi : x \mapsto 2\tan x \text{ est continue sur } \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[. \\ f \text{ est continue sur } \mathbb{R}. \end{cases}$

$\Rightarrow g = f\circ\varphi$ est continue sur $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \varphi(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} g(x) = -1 = g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow g$ est continue à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$.

<u>Conclusion</u> : g est continue sur $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Correction de l'exercice 2

1) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 + \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 + \dfrac{2x}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 + \dfrac{2x}{|x|\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}}\right).$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{2\cancel{x}}{-\cancel{x}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}\right) = -1.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2x}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}\right).$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}\right) = 3.$$

Interprétation : Les droites d'équations $y = -1$ et $y = 3$ sont des asymptotes respectivement aux voisinages de $-\infty$ et $+\infty$.

b) La fonction $x \mapsto 1 + x^2$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :

$$f'(x) = 2\cdot\frac{\sqrt{x^2+1} - x\cdot\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = 2\cdot\frac{\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{2}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}} > 0.$$

c)

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-1 \nearrow 3$

d) f est croissante sur $\mathbb{R}$ donc $2 \le x \le 3$

$\Rightarrow f(2) \le f(x) \le f(3)$ or $f(2) = 1 + \dfrac{4}{\sqrt{5}} > 2$

et $f(3) = 1 + \dfrac{6}{\sqrt{10}} < 3$ donc $2 \le f(x) \le 3$

d'où $f\left([2,3]\right) \subset [2,3]$.

e) $2 \le x \le 3 \Leftrightarrow 5 \le x^2 + 1 \le 10 \Leftrightarrow \sqrt{5} \le \sqrt{x^2+1} \le \sqrt{10}$ et $5\sqrt{5} \le \left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1} \le 10\sqrt{10}$

$$\Rightarrow \frac{1}{10\sqrt{10}} \le \frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}} \le \frac{1}{5\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{1}{5\sqrt{10}} \le f'(x) \le \frac{2}{5\sqrt{5}} \Rightarrow \boxed{\left|f'(x)\right| \le \frac{2}{5\sqrt{5}}}.$$

2) a) Soit g la fonction définie sur $[2,3]$ par $g(x) = f(x) - x$. g est dérivable sur $[2,3]$ et $\forall x \in [2,3]$, $g'(x) = f'(x) - 1$. Or $\forall x \in [2,3]$, $0 < f'(x) < \dfrac{2}{5\sqrt{5}} < 1$

$$\Rightarrow g'(x) = f'(x) - 1 < 0 \text{ et on a } g(2)\times g(3) = \left(\frac{4}{\sqrt{5}} - 1\right)\left(\frac{6}{\sqrt{10}} - 2\right) < 0$$

Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution dans $[2,3]$.

b) $T_0 : y = f'(0)(x-0) + f(0) = 2x + 1$. Donc $\boxed{T_0 : y = 2x + 1}$

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

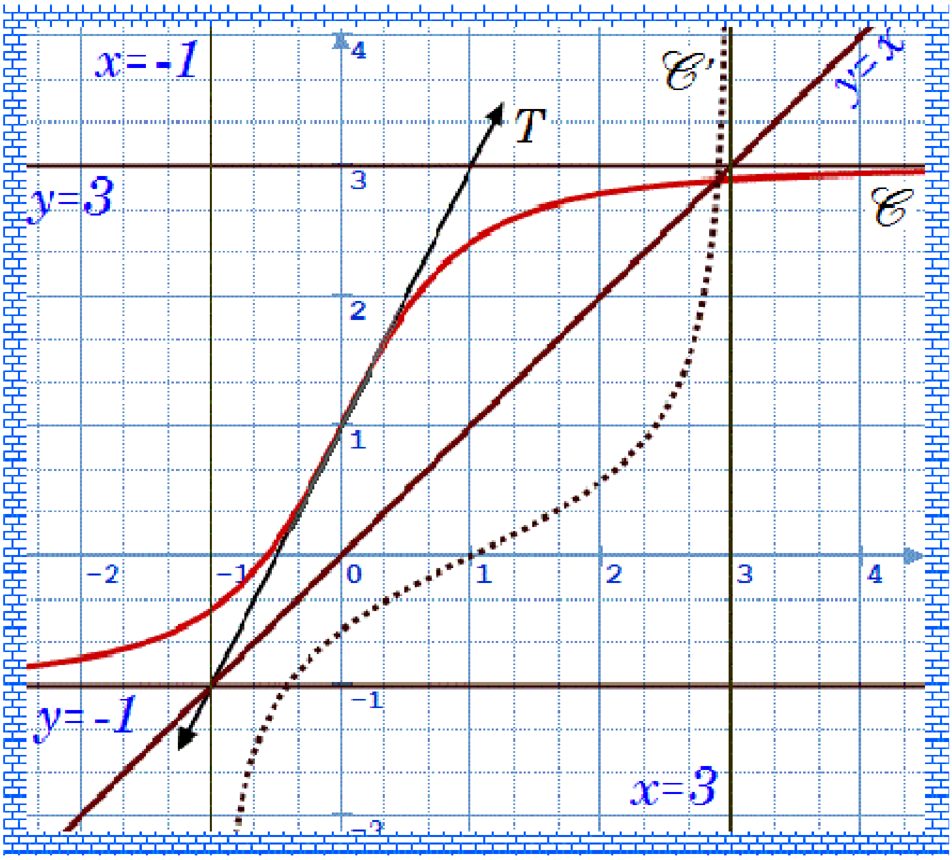
$$f(-x) = 1 - \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$= 2 - \left(1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$
$$= 2 - f(x)$$

Donc le point $I(0,1)$ est un centre de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}$.

d) voir figure ci – contre.

3) a) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $J = f(\mathbb{R}) =]-1,3[$.

b) Voir figure ci – contre.



4) a) Pour $n = 0$, $u_0 = 2 \in [2,3]$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \in [2,3]$ et montrons que $u_{n+1} \in [2,3]$.

On sait que $f([2,3]) \subset [2,3]$ et on a $u_n \in [2,3] \Rightarrow u_{n+1} = f(u_n) \in [2,3]$.

<u>Conclusion</u> : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [2,3]$.

b) f est dérivable sur $[2,3]$ et $\forall x \in [2,3]$, $|f'(x)| \le \dfrac{2}{5\sqrt{5}}$ en plus u_n et $\alpha \in [2,3]$

donc d'après l'inégalité des accroissements finis $|f(u_n) - f(\alpha)| \le \dfrac{2}{5\sqrt{5}}|u_n - \alpha|$

Ce qui donne $|u_{n+1} - \alpha| \le \dfrac{2}{5\sqrt{5}}|u_n - \alpha|$ pour tout entier naturel n.

c) Pour $n = 0$, $|u_0 - \alpha| \le \left(\dfrac{2}{5\sqrt{5}}\right)^0 |2-\alpha|$ vraie car $u_0 = 2$ et $\left(\dfrac{2}{5\sqrt{5}}\right)^0 = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supp que $|u_n - \alpha| \le \left(\dfrac{2}{5\sqrt{5}}\right)^n |2-\alpha|$ et montrons que $|u_{n+1} - \alpha| \le \left(\dfrac{2}{5\sqrt{5}}\right)^{n+1} |2-\alpha|$

$$|u_{n+1} - \alpha| \le \frac{2}{5\sqrt{5}}|u_n - \alpha| \le \frac{2}{5\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{2}{5\sqrt{5}}\right)^n |2-\alpha| \Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \le \left(\frac{2}{5\sqrt{5}}\right)^{n+1} |2-\alpha|$$

<u>Conclusion</u> : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \le \left(\dfrac{2}{5\sqrt{5}}\right)^n |2-\alpha|$

d) On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \le \left(\dfrac{2}{5\sqrt{5}}\right)^n |2-\alpha|$ et $\lim \left(\dfrac{2}{5\sqrt{5}}\right)^n |2-\alpha| = 0$ car $\dfrac{2}{5\sqrt{5}} \in]-1,1[$

donc la suite $(u_n - \alpha)$ converge vers 0 et par suite (u_n) converge vers α.

Correction de l'exercice 3

1) a) $P(2) = 2^3 + 2\left(\sqrt{2} - 1\right)\cdot 2^2 + 4\left(1 - \sqrt{2}\right)\cdot 2 - 8 = 8 + 8\sqrt{2} - 8 + 8 - 8\sqrt{2} - 8 = 0$

$\Rightarrow z_0 = 2$ est une solution de l'équation $P(z) = 0$.

b) $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = (z-2)\left(z^2 + az + b\right) = z^3 + az^2 + bz - 2z^2 - 2az - 2b$

$\Leftrightarrow P(z) = z^3 + (a-2)z^2 + (b-2a)z - 2b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 2 = 2\sqrt{2} - 2 \\ b - 2a = 4 - 4\sqrt{2} \\ -2b = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{2} \\ b = 4 \\ b - 2a = 4 - 4\sqrt{2} \quad \text{vraie} \end{cases}$$

c) $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-2)\left(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4\right) = 0 \Leftrightarrow z = 2$ ou $z^2 + 2\sqrt{2}z + 4 = 0$.

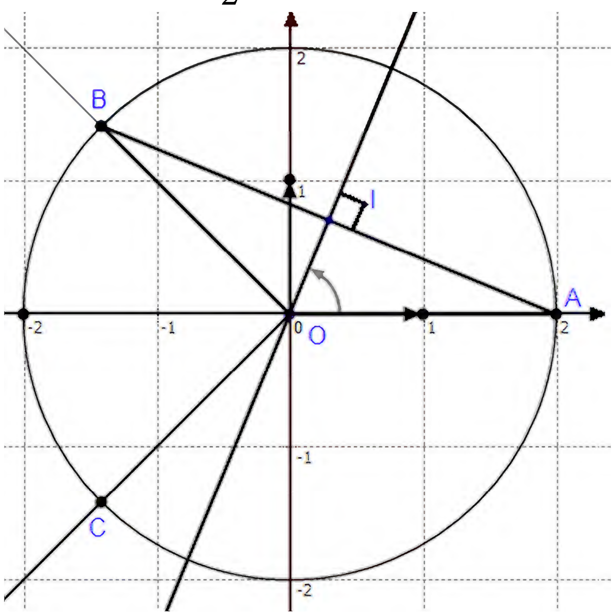
$\Delta = \left(2\sqrt{2}\right)^2 - 16 = -8 = \left(2i\sqrt{2}\right)^2$ donc les solutions sont :

$$z' = \frac{-2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} = z_1 \quad \text{et} \quad z'' = \frac{-2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} = z_2.$$

d) $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2+2} = 2$.

$$z_1 = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$z_2 = \overline{z_1} = 2e^{-i\frac{3\pi}{4}}.$$



2) a) voir figure ci – contre

b) $OA = |z_A| = 2$, $OB = |z_B| = 2$.

$OA = OB \Rightarrow OAB$ est un triangle isocèle.

OAB est isocèle de sommet principale O et I milieu de $[AB]$ donc (OI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$

Et par suite $\widehat{\left(\vec{u}, \overrightarrow{OI}\right)} \equiv \frac{1}{2}\left(\vec{u}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{1}{2}\arg z_B \equiv \frac{3\pi}{8} \quad [2\pi]$.

c) $z_I = \frac{z_0 + z_1}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $|z_I| = \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4 - 4\sqrt{2} + 2 + 2}{4}} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$.

d) $\arg z_I \equiv \widehat{\left(\vec{u}, \overrightarrow{OI}\right)} \equiv \frac{3\pi}{8} \quad [2\pi]$ donc $z_I = \sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\text{Alors} \begin{cases} \sqrt{2-\sqrt{2}}\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ \sqrt{2-\sqrt{2}}\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2\sqrt{4-2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{cases}$$

Correction de l'exercice 4

1) a) Puisque $f(ABCD) = ABCD$ donc $f([AC])$ est un segment de sommets deux points distincts de l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ et de même longueur que $[AC]$

Donc $f([AC]) = [AC]$

b) une isométrie conserve le milieu et puisque O est le milieu de $[AC]$ alors $f(O)$ est le milieu du segment image $f([AC]) = [AC] \Rightarrow f(O) = O$.

c) Soit f une isométrie telle que $f(ABCD) = ABCD$ alors $f(O) = O$

alors f est l'Identité, une rotation ou une symétrie orthogonale.

On a : $f([AC]) = [AC]$ donc deux cas se présentent :

<u>1^{er} cas :</u> $f(A) = A$ et $f(C) = C$

f est une isométrie qui fixe deux points distincts A et $C \Rightarrow f = Id$ ou $f = S_{(AC)}$

<u>$2^{ème}$ cas :</u> $f(A) = C$ et $f(C) = A$

Posons $\varphi = f o S_{(BD)}$. On a $\varphi(A) = A$ et $\varphi(C) = C$.

φ est une isométrie qui fixe deux points distincts A et $C \Rightarrow \varphi = Id$ ou $\varphi = S_{(AC)}$

Donc $f = S_{(BD)}$ ou $f = S_{(AC)} o S_{(BD)} = S_O$ symétrie centrale de centre O.

Alors les isométrie qui laissent globalement invariant le losange $ABCD$ sont :

l'id, $S_{(AC)}$, $S_{(BD)}$ et S_O.

2) a) $f_1 = S_{(AC)} o S_{(AB)}$.

$$\begin{cases} (AB) \cap (AC) = \{A\} \\ (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \dfrac{\pi}{6} \quad [2\pi] \end{cases} \Rightarrow f_1 \text{ est la rotation de centre } A \text{ et d'angle } \frac{\pi}{3}.$$

$f_2 = S_{(CD)} o S_{(CA)}$.

$$\begin{cases} (CD) \cap (CA) = \{C\} \\ (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}}) \equiv -\dfrac{\pi}{6} \quad [2\pi] \end{cases} \Rightarrow f_2 \text{ est la rotation de centre } C \text{ et d'angle } -\frac{\pi}{3}.$$

b) $g = r_{\left(C, -\frac{\pi}{3}\right)} o r_{\left(A, \frac{\pi}{3}\right)} = S_{(CD)} o S_{(CA)} o S_{(AC)} o S_{(AB)} = S_{(CD)} o S_{(AB)}$ car $S_{(CA)} o S_{(AC)} = Id$

et puisque $(CD) \parallel (AB)$ alors g est une translation de vecteur $2\overrightarrow{AH}$ où H est le projeté orthogonale de A sur (CD).

c) $t_{\overrightarrow{BD}}\, oh(B) = t_{\overrightarrow{BD}}(h(B)) = t_{\overrightarrow{BD}}(F) = B$ et $t_{\overrightarrow{BD}}\, oh(D) = t_{\overrightarrow{BD}}(h(D)) = t_{\overrightarrow{BD}}(B) = D$

$t_{\overrightarrow{BD}}\, oh$ est une isométrie qui fixe deux points distincts B et D

En plus $t_{\overrightarrow{BD}}\, oh(A) = t_{\overrightarrow{BD}}(E) \neq A$ car $\overrightarrow{EA} \neq \overrightarrow{BD} \Rightarrow t_{\overrightarrow{BD}}\, oh \neq Id$

Donc $t_{\overrightarrow{BD}}\, oh = S_{(BD)}$.

d) $t_{\overrightarrow{BD}}\, oh = S_{(BD)} \Leftrightarrow h = t_{\overrightarrow{DB}}\, o S_{(BD)}$ avec $\overrightarrow{DB}$ vecteur directeur de (BD)

Donc h est la symétrie glissante de vecteur $\overrightarrow{DB}$ et d'axe (BD).